1ο Διαγώνισμα περιόδου 2017-18 στις Συναρτήσεις και τα Όρια

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$, να αποδείξετε ότι, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$.

μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να κάνετε την γεωμετρική ερμηνεία του. Ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος; Να δώσετε 2 παραδείγματα είτε σχηματικά είτε μέσω συγκεκριμένης συνάρτησης.

μονάδες 8

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$

β) Αν για μια συνάρτηση $f: A\to\mathbb{R}$ υπάρχουν $x_1,x_2\in A$ με $x_1<x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1)<f(x_2)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Α.

γ) Αν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ δεν υπάρχουν, τότε δεν υπάρχει και το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]$.

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε το σύνολο τιμών της δεν μπορεί να είναι της μορφής $[\gamma,\delta)$.

ε) Αν $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\beta$, $\lim\limits_{x\to\beta} g(x)=\gamma$ και $f(x)\neq\beta$ κοντά στο α, τότε $\lim\limits_{x\to\alpha} g(f(x))=\gamma$.

μονάδες 5x2

Θέμα Β

Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $f(x+1)=x^3+3x^2+3x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να δείξετε ότι η $f(x)=x^3$.

μονάδες 4

Β2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

μονάδες 6

Β3. Να υπολογίσετε τα όρια:

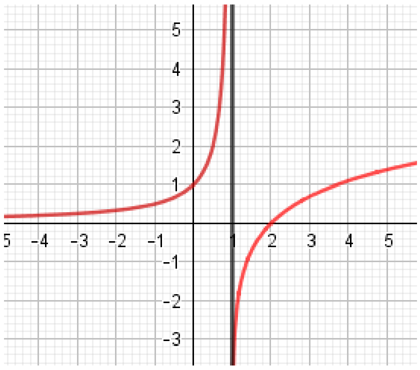
i. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+x-2}{\sqrt{x}-1}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to\sqrt[3]{\pi}}\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)-\pi}$ **iii.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{f^2(x)}$

μονάδες 3x4

Β4. Αν $g(x)\leq f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

μονάδες 3

Θέμα Γ



Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

Γ1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{f(x)}$

β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{|f(x)|}$

γ) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(f(x)\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}\right)$

δ) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{1}{f(x)}\eta\mu f(x)\right)$

μονάδες 4x3

Γ2. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=f^3(x)+f(x)$, $x<1$.

α) Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

μονάδες 4

β) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f^3(x)+f(x)=2017$.

μονάδες 4

Γ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $xf(x)=3x+1$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα μεγαλύτερη από το 1.

μονάδες 5

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f^2(x)+x^2=e^{2x}+2xf(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x)=e^x+x$.

μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

μονάδες 3

Δ3. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^x=1821-x$.

μονάδες 4

Δ4. Να λύσετε την ανίσωση $e^{e^x+x}+e^x-e<1-x$.

μονάδες 4

Δ5. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} δεν τέμνονται.

μονάδες 4

Δ6. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)-x+2^x}{(f(x)-x)^2+e^x}$.

μονάδες 4

Καλή Επιτυχία!

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύσεις

Θέμα Α

Α1. Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta) < 0$, αφού $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$.

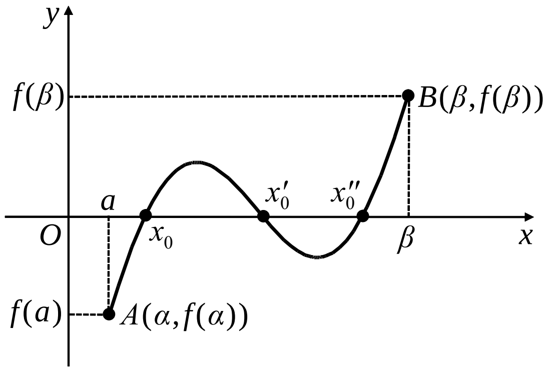
Α2. Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$. Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα. (α,β).

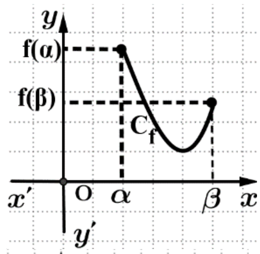
Γεωμετρική ερμηνεία

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.

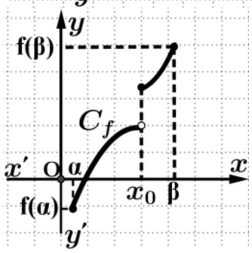


Το αντίστροφο του θ. Bolzano δεν ισχύει.

- Στο διπλανό σχήμα δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, που έχει δύο ρίζες στο (α,β) χωρίς όμως να ισχύει ότι $f(\alpha)f(\beta) < 0$.



- Στο διπλανό σχήμα δίνεται συνάρτηση f με $f(\alpha)f(\beta) < 0$ που έχει ρίζα στο (α,β), χωρίς όμως να είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.



Α3. α) Λ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Σ

Θέμα Β

Β1. Είναι $f(x+1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$

Θέτουμε $x + 1 = \omega$, οπότε $f(\omega) = \omega^3$, $\omega \in \mathbb{R}$ άρα και $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

Β2. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τότε $x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

B3. i. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)+x-2}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x-2}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=$

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+2)(\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}}=8$$

ii. Θέτουμε $f(x)=y$ με $\lim\limits_{x\to\sqrt[3]{\pi}}f(x)=\left(\sqrt[3]{\pi}\right)^3=\pi$. Τότε

$$\lim_{x\to\sqrt[3]{\pi}}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{\eta\mu y}{y-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{\eta\mu(\pi-y)}{y-\pi}\underset{\omega\to0}{\overset{\pi-y=\omega}{=}}\lim_{\omega\to0}\frac{\eta\mu\omega}{-\omega}=-1$$

iii. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+1}{f^2(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+1}{x^6}=\lim\limits_{x\to0}\left[(x+1)\cdot\dfrac{1}{x^6}\right]=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to0}(x+1)=1$ και $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^6}=+\infty$.

B4. Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ και $g(x)\le f(x)$, είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$.

Θέμα Γ

Γ1. α) Είναι $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=+\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{f(x)}\underset{y\to+\infty}{\overset{f(x)=y}{=}}\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{1}{y}=0$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1}{|f(x)|}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1}{-f(x)}=-\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=0$ και

$f(x)<0$ για κάθε $x\in(1,2)$.

γ) Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο $-\infty$ είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)\eta\mu\frac{1}{f(x)}\right)\underset{\omega\to+\infty}{\overset{\frac{1}{f(x)}=\omega}{=}}\lim_{\omega\to+\infty}\left(\frac{1}{\omega}\eta\mu\omega\right)=\lim_{\omega\to+\infty}\frac{\eta\mu\omega}{\omega}=0 \text{ γιατί:}$$

$$\left|\frac{\eta\mu\omega}{\omega}\right|=\frac{|\eta\mu\omega|}{|\omega|}\le\frac{1}{|\omega|}\Leftrightarrow-\frac{1}{|\omega|}\le\frac{\eta\mu\omega}{\omega}\le\frac{1}{|\omega|}$$

Είναι $\lim\limits_{\omega\to+\infty}\dfrac{1}{|\omega|}=0=\lim\limits_{\omega\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{|\omega|}\right)$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{\omega\to+\infty}\dfrac{\eta\mu\omega}{\omega}=0$.

δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{f(x)}\eta\mu f(x)\right)\underset{y\to0}{\overset{f(x)=y}{=}}\lim\limits_{y\to0}\left(\dfrac{1}{y}\eta\mu y\right)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\eta\mu y}{y}=1$

Γ2. α) Από το σχήμα παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1)$.

Για κάθε $x_1,x_2\in(-\infty,1)$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)<f(x_2)$ (1) και

$f^3(x_1)<f^3(x_2)$ (2).

Από (1)+(2)$\Rightarrow$ $f^3(x_1)+f(x_1)<f^3(x_2)+f(x_2)\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1)$.

β) $f^3(x)+f(x)=2017\Leftrightarrow g(x)=2017$

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0^3+0=0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$, είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) \underset{y\to+\infty}{\overset{f(x)=y}{=}} \lim\limits_{y\to+\infty}\left(y^3+y\right)=\lim\limits_{y\to+\infty} y^3=+\infty$.

Η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=(-\infty,1)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $g(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} g(x),\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)\right)=(0,+\infty)$.

Επειδή το 2017 βρίσκεται στο σύνολο τιμών της g, υπάρχει $x_0\in A$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=2017$ και επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα, το x_0 είναι μοναδικό.

Γ3. $xf(x)=3x+1 \overset{x>1}{\Leftrightarrow} f(x)=3+\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow f(x)-3-\dfrac{1}{x}=0$.

Έστω $h(x)=f(x)-3-\dfrac{1}{x},\ x>1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(f(x)-3-\dfrac{1}{x}\right)=-\infty-3-1=-\infty$, οπότε υπάρχει $\alpha>1$, όπου ο α είναι πολύ κοντά στο 1 τέτοιο, ώστε $h(\alpha)<0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3-\dfrac{1}{x}\right)=+\infty-3-0=+\infty$, άρα υπάρχει κάποιος πολύ μεγάλος αριθμός β τέτοιος ώστε $h(\beta)>0$.

Είναι $h(\alpha)h(\beta)<0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, σύμφωνα με το θεώρημα h η εξίσωση $h(x)=0 \Leftrightarrow f(x)-3-\dfrac{1}{x}=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(\alpha,\beta)\subseteq(1,+\infty)$.

Θέμα Δ

Δ1. $f^2(x)+x^2=e^{2x}+2xf(x) \Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2=e^{2x} \Leftrightarrow \left(f(x)-x\right)^2=e^{2x}$ (1)

Επειδή $e^{2x}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)-x\neq 0$ και επειδή η $f(x)-x$ είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $f(0)-0=1>0$ άρα $f(x)-x>0$ και η (1) γίνεται:

$f(x)-x=\sqrt{e^{2x}}=e^x \Leftrightarrow f(x)=e^x+x,\ x\in\mathbb{R}$

Δ2. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε: $e^{x_1}<e^{x_2}$, οπότε και

$e^{x_1}+x_1<e^{x_2}+x_2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$

Δ3. $e^x=1821-x \Leftrightarrow e^x+x=1821 \Leftrightarrow f(x)=1821$ (2)

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ και επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=\mathbb{R}$.

Επειδή $1821\in f(A)$ υπάρχει μοναδικός $x_0\in A=\mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=1821$.

Δ4. $e^{e^x+x}+e^x-e<1-x \Leftrightarrow e^{e^x+x}+e^x+x<e+1 \Leftrightarrow e^{f(x)}+f(x)<f(1) \Leftrightarrow$

$f(f(x))<f(1) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)<1 \Leftrightarrow f(x)<f(0) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x<0$

Δ5 Είναι $e^x+x>x \Leftrightarrow f(x)>x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και λόγω συμμετρίας με την $y=x$ είναι και

$f^{-1}(x)<x$, άρα $f(x)>f^{-1}(x)$.

Δ6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x+2^x}{\left(f(x)-x\right)^2+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+\cancel{x}-\cancel{x}+2^x}{\left(e^x+\cancel{x}-\cancel{x}\right)^2+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x\left(1+\left(\frac{2}{e}\right)^x\right)}{e^{2x}\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{e^x}\dfrac{1+\left(\frac{2}{e}\right)^x}{1+\frac{1}{e^x}}\right]=0$