14ο Λύκειο Περιστερίου
Κριτήριο αξιολόγησης στο γινόμενο αριθμού με διάνυσμα

Νοέμβριος 2017

Ον/νυμο …………………………………………………………………………….. **Ομάδα Α**

Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$ και $B(4,6)$. Να βρείτε:

α) Το μέσο Γ του ΑΒ. μονάδες 5

β) Το μέτρο του διανύσματος ΑΒ. μονάδες 7

γ) Σημείο Μ του επιπέδου για το οποίο ισχύει ότι $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$. μονάδες 15

δ) Σημείο Ζ του άξονα x΄x τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΖΑΒ να είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ. μονάδες 15

ε) Το συμμετρικό του Α ως προς το Β. μονάδες 15

στ) Σημείο Κ τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{AK} // x'x$ και $\left|\overrightarrow{AK}\right| = 3$. μονάδες 18

ζ) Αν $\Delta(6,2)$, να βρείτε σημείο Ε ώστε το τετράπλευρο ΑΒΕΔ να είναι παραλληλόγραμμο. μονάδες 10

η) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και $\Gamma(-5,-6)$ είναι συνευθειακά. μονάδες 15

14ο Λύκειο Περιστερίου
Διαγώνισμα στις συντεταγμένες διανύσματος

Νοέμβριος 2017

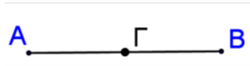
Ον/νυμο ……………………………………………………………………….. **Ομάδα Β**

Δίνονται τα σημεία $A(-2,3)$ και $B(4,-5)$. Να βρείτε:

α) Το μέτρο του διανύσματος ΑΒ. μονάδες 5
β) Το μέσο Γ του ΑΒ. μονάδες 7
γ) Σημείο Ζ του άξονα y΄y τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΖΑΒ να είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ. μονάδες 15
δ) Σημείο Μ του επιπέδου για το οποίο ισχύει ότι $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$. μονάδες 15
ε) Το συμμετρικό του Α ως προς το Β. μονάδες 15
στ) Σημείο Κ τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{AK} // y'y$ και $\left|\overrightarrow{AK}\right| = 2$. μονάδες 18
ζ) Αν $\Delta(6,2)$, να βρείτε σημείο Ε ώστε το τετράπλευρο ΑΒΕΔ να είναι παραλληλόγραμμο. μονάδες 10
η) Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β και $\Gamma(-5,7)$ είναι συνευθειακά. μονάδες 15

Λύσεις

Ομάδα Α



α) $x_\Gamma = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{1+4}{2} = \dfrac{5}{2}$, $y_\Gamma = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{2+6}{2} = 4$ άρα $\Gamma\left(\dfrac{5}{2}, 4\right)$.

β) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = 5$

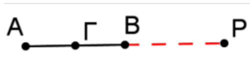
γ) Έστω $M(x,y)$, τότε $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow (x-1, y-2) = 2(4-x, 6-y) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 8-2x \\ y-2 = 12-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \dfrac{14}{3} \end{cases}$, άρα

$M\left(3, \dfrac{14}{3}\right)$

δ) Έστω $Z(\zeta, 0)$, τότε: $(ZA) = (ZB) \Leftrightarrow$

$\sqrt{(\zeta-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{(\zeta-4)^2 + (0-6)^2} \Leftrightarrow \cancel{\zeta^2} - 2\zeta + 1 + 4 = \cancel{\zeta^2} - 8\zeta + 16 + 36 \Leftrightarrow 6\zeta = 47 \Leftrightarrow \zeta = \dfrac{47}{6}$,

άρα $Z\left(\dfrac{47}{6}, 0\right)$.



ε) Έστω P το συμμετρικό του A ως προς το B, τότε το B είναι μέσο του AP και ισχύει ότι:

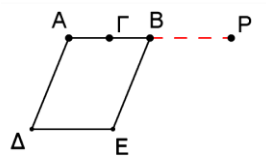
$x_B = \dfrac{x_A + x_P}{2} \Leftrightarrow 4 = \dfrac{1 + x_P}{2} \Leftrightarrow 8 = 1 + x_P \Leftrightarrow x_P = 7$,

$y_B = \dfrac{y_A + y_P}{2} \Leftrightarrow 6 = \dfrac{2 + y_P}{2} \Leftrightarrow 12 = 2 + y_P \Leftrightarrow y_P = 10$, άρα $P(7,10)$.

στ) Έστω $K(x_1, y_1)$, τότε $\overrightarrow{AK} = (x_1 - 1, y_1 - 2)$

Είναι $\overrightarrow{AK} // x'x \Leftrightarrow y_1 - 2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 2$, τότε $\overrightarrow{AK} = (x_1 - 1, 0)$ και

$\left|\overrightarrow{AK}\right| = 3 \Leftrightarrow |x_1 - 1| = 3 \Leftrightarrow x_1 - 1 = \pm 3 \Leftrightarrow x_1 = 4$ ή $x_1 = -2$ άρα $K(4,2)$ ή $(-2,2)$



ζ) Έστω $E(x_2, y_2)$

ΑΒΕΔ παραλληλόγραμμο αν και μόνο αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta E} \Leftrightarrow$

$(4-1, 6-2) = (x_2 - 6, y_2 - 2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = x_2 - 6 \\ 4 = y_2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 9 \\ y_2 = 6 \end{cases}$, άρα $E(9,6)$

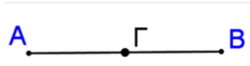
η) $A(1,2)$, $B(4,6)$, $\Gamma(-5,-6)$.

$\overrightarrow{AB} = (4-1, 6-2) = (3,4)$, $\overrightarrow{B\Gamma} = (-5-4, -6-6) = (-9,-12)$, $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}\right) = 0$

Ομάδα Β

2. α) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(4+2)^2+(-5-3)^2}=10$

β) $x_\Gamma=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{-2+4}{2}=1$, $y_\Gamma=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{3-5}{2}=-1$ άρα $\Gamma(1,-1)$.



γ) Έστω $Z(0,\zeta)$, τότε: $(ZA)=(ZB)\Leftrightarrow$

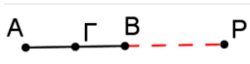
$\sqrt{(0+2)^2+(\zeta-3)^2}=\sqrt{(0-4)^2+(\zeta+5)^2}\Leftrightarrow 4+\cancel{\zeta^2}-6\zeta+9=16+\cancel{\zeta^2}+10\zeta+25\Leftrightarrow 16\zeta=-28\Leftrightarrow\zeta=-\dfrac{7}{4}$,

άρα $Z\left(0,-\dfrac{7}{4}\right)$.

δ) Έστω $M(x,y)$, τότε $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow(x+2,y-3)=2(4-x,-5-y)\Leftrightarrow\begin{cases}x+2=8-2x\\ y-3=-10-2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=-\dfrac{7}{3}\end{cases}$, άρα

$M\left(3,-\dfrac{7}{3}\right)$.

ε) Έστω P το συμμετρικό του A ως προς το B, τότε το B είναι μέσο του AP και ισχύει ότι:



$x_B=\dfrac{x_A+x_P}{2}\Leftrightarrow 4=\dfrac{-2+x_P}{2}\Leftrightarrow 8=-2+x_P\Leftrightarrow x_P=10$,

$y_B=\dfrac{y_A+y_P}{2}\Leftrightarrow -5=\dfrac{3+y_P}{2}\Leftrightarrow -10=3+y_P\Leftrightarrow y_P=-13$, άρα $P(10,-13)$.

στ) Έστω $K(x_1,y_1)$, τότε $\overrightarrow{AK}=(x_1+2,y_1-3)$

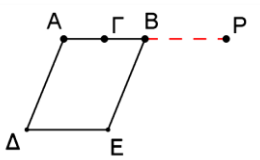
Είναι $\overrightarrow{AK}//yy\Leftrightarrow x_2+2=0\Leftrightarrow x_1=-2$, τότε $\overrightarrow{AK}=(0,y_1-3)$ και

$\left|\overrightarrow{AK}\right|=2\Leftrightarrow|y_1-3|=2\Leftrightarrow y_1-3=\pm2\Leftrightarrow y_1=5$ ή $y_1=1$, άρα $K(-2,5)$ ή $(-2,1)$

ζ) Έστω $E(x_2,y_2)$

ΑΒΕΔ παραλληλόγραμμο αν και μόνο αν $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Delta E}\Leftrightarrow$

$(4+2,-5-3)=(x_2-6,y_2-2)\Leftrightarrow\begin{cases}6=x_2-6\\ -8=y_2-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=12\\ y_2=-6\end{cases}$, άρα $E(12,-6)$



η) $A(-2,3),B(4,-5),\Gamma(-5,7)$.

$\overrightarrow{AB}=(4+2,-5-3)=(6,-8)$, $\overrightarrow{B\Gamma}=(-5-4,7+5)=(-9.12)$, $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B\Gamma}\right)=0$.