

Άλγεβρα Β΄ Λυκείου
Διαγώνισμα στην ανάγωγή στο 1ο τεταρτημόριο και
τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Ομάδα: Α

Όνομα:..... **Επώνυμο:** **ημ/νία:**

Θέμα Α

μονάδες 3x7

Να υπολογίσετε τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς:

$\eta\mu 120^\circ =$

$\epsilon\phi 210^\circ =$

$\sigma\upsilon\nu 300^\circ =$

Θέμα Β

Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $\sigma\upsilon\nu(B + \Gamma) + \sigma\upsilon\nu A = 0$.

μονάδες 14

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \rho \sigma\upsilon\nu(\omega x)$, $\rho, \omega > 0$ η οποία έχει περίοδο π και έχει και μέγιστο το 1.

Να βρείτε την f και να κάνετε την γραφική της παράσταση σε διάστημα μιας περιόδου.

μονάδες 15

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(2017\pi - x) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) - \eta\mu(2018\pi - x) - \eta\mu(2017\pi + x)$, $x \in [0, 2\pi]$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 4\eta\mu x$.

μονάδες 15

β) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x), \quad g(x) = f(2x), \quad h(x) = -f(x) \text{ στο } [0, 2\pi].$$

μονάδες 15

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 2$.

μονάδες 10

δ) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $\varphi(x) = f(x) + 2$.

μονάδες 10

Άλγεβρα Β΄ Λυκείου
Διαγώνισμα στην ανάγωγή στο 1ο τεταρτημόριο και
τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Ομάδα: Β

Όνομα:..... **Επώνυμο:** **ημ/νία:**

Θέμα Α

μονάδες 3x7

Να υπολογίσετε τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς:

$\sigma\upsilon\nu 120^\circ =$

$\epsilon\phi 225^\circ =$

$\eta\mu 300^\circ =$

Θέμα Β

Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $\eta\mu(B + \Gamma) = \eta\mu A$.

μονάδες 14

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \rho \sigma\upsilon\nu(\omega x)$, $\rho, \omega > 0$ η οποία έχει περίοδο 4π και έχει και μέγιστο το 3.

Να βρείτε την f και να κάνετε την γραφική της παράσταση σε διάστημα μιας περιόδου.

μονάδες 15

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(1821\pi - x) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{11\pi}{2} + x\right) - \eta\mu(2018\pi - x) - \eta\mu(1453\pi + x)$, $x \in [0, 2\pi]$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2\eta\mu x$.

μονάδες 15

β) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x), \quad g(x) = f(2x), \quad h(x) = -f(x) \text{ στο } [0, 2\pi].$$

μονάδες 15

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 1$.

μονάδες 10

δ) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $\varphi(x) = f(x) + 4$.

μονάδες 10

Λύσεις

Ομάδα Α

Θέμα Α

$$\eta\mu 120^\circ = \eta\mu(180^\circ - 60^\circ) = \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\epsilon\phi 210^\circ = \epsilon\phi(180^\circ + 30^\circ) = \epsilon\phi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sigma\upsilon\nu 300^\circ = \sigma\upsilon\nu(360^\circ - 60^\circ) = \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$$

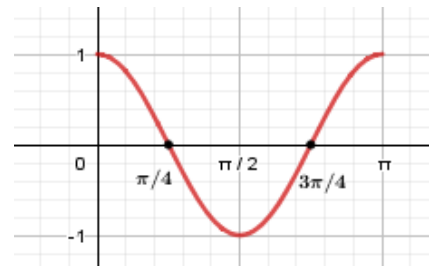
Θέμα Β

$$\sigma\upsilon\nu(B + \Gamma) + \sigma\upsilon\nu A = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - A) + \sigma\upsilon\nu A = -\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu A = 0.$$

Θέμα Γ

Επειδή η f έχει περίοδο π , είναι $\frac{2\pi}{\omega} = \pi \Leftrightarrow \omega = 2$.

Επειδή η f έχει μέγιστο το 1, είναι $\rho = 1$, οπότε $f(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$



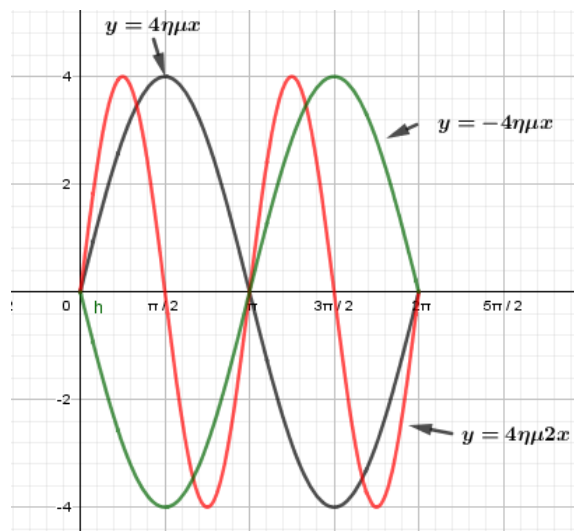
Θέμα Δ

$$\alpha) f(x) = \eta\mu(2016\pi + \pi - x) + \sigma\upsilon\nu\left(4\pi - \frac{\pi}{2} + x\right) - \eta\mu(-x) - \eta\mu(2016\pi + \pi + x) \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \eta\mu(\pi - x) + \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) + \eta\mu x - \eta\mu(\pi + x) \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu\left[-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] + \eta\mu x + \eta\mu x = 3\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 3\eta\mu x + \eta\mu x = 4\eta\mu x$$

$\beta)$ Είναι $f(x) = 4\eta\mu x$, $g(x) = 4\eta\mu 2x$, $h(x) = -4\eta\mu x$.



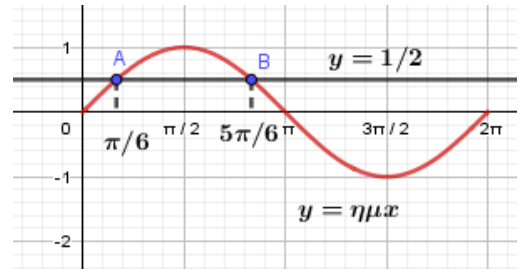
γ) $f(x) > 2 \Leftrightarrow 4\eta\mu x > 2 \Leftrightarrow \eta\mu x > \frac{1}{2}$.

Τα σημεία τομής των $y = \eta\mu x$ και $y = \frac{1}{2}$ είναι τα σημεία

με $\eta\mu x = \frac{1}{2}$, $x \in [0, 2\pi]$, άρα είναι τα $x = \frac{\pi}{6}$ και $x = \frac{5\pi}{6}$.

Στο το διπλανό σχήμα παρατηρούμε ότι η $y = \eta\mu x$

βρίσκεται πάνω από την $y = \frac{1}{2}$ όταν $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$.



δ) Είναι $\varphi(x) = f(x) + 2 = 4\eta\mu x + 2$

$-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq 4\eta\mu x \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq 4\eta\mu x + 2 \leq 6 \Leftrightarrow -2 \leq \varphi(x) \leq 6$

Η φ έχει ελάχιστο το -2 όταν $\eta\mu x = -1$, δηλαδή για $x = \frac{3\pi}{2}$ και μέγιστο το 6 όταν $\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$.

Ομάδα: Β

Θέμα Α

$\sigma\upsilon\nu 120^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 60^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$\epsilon\varphi 225^\circ = \epsilon\varphi(180^\circ + 45^\circ) = \epsilon\varphi 45^\circ = 1$

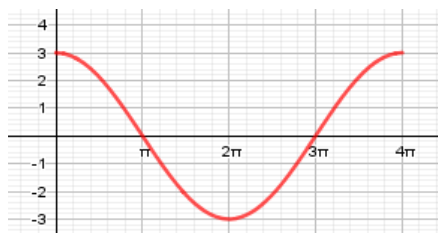
$\eta\mu 300^\circ = \eta\mu(360^\circ - 60^\circ) = -\eta\mu 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Θέμα Β

$\eta\mu(B + \Gamma) = \eta\mu(180^\circ - A) = \eta\mu A$.

Θέμα Γ

Είναι $T = 4\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2}$ και $f_{\max} = 3 \Leftrightarrow \rho = 3$, άρα $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}$



Θέμα Δ

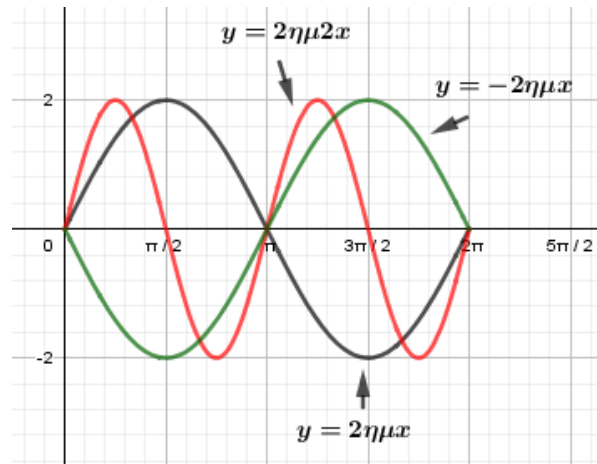
α) $f(x) = \eta\mu(1821\pi - x) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{11\pi}{2} + x\right) - \eta\mu(2018\pi - x) - \eta\mu(1453\pi + x)$

$f(x) = \eta\mu(1820\pi + \pi - x) - \sigma\upsilon\nu\left(6\pi - \frac{\pi}{2} + x\right) - \eta\mu(-x) - \eta\mu(1452\pi + \pi + x) \Leftrightarrow$

$f(x) = \eta\mu(\pi - x) - \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) + \eta\mu x - \eta\mu(\pi + x) \Leftrightarrow$

$f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu\left[-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] + \eta\mu x + \eta\mu x = 3\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 3\eta\mu x - \eta\mu x = 2\eta\mu x$

β) Είναι $f(x) = 2\eta\mu x$, $g(x) = 2\eta\mu 2x$, $h(x) = -2\eta\mu x$.



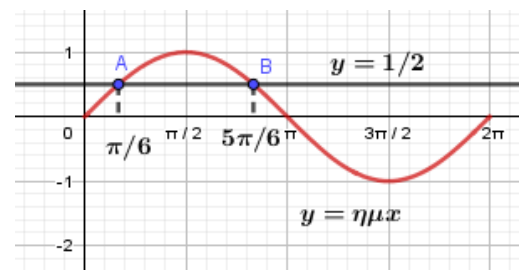
γ) $f(x) > 1 \Leftrightarrow 2\eta\mu x > 1 \Leftrightarrow \eta\mu x > \frac{1}{2}$.

Τα σημεία τομής των $y = \eta\mu x$ και $y = \frac{1}{2}$ είναι τα σημεία

με $\eta\mu x = \frac{1}{2}$, $x \in [0, 2\pi]$, άρα είναι τα $x = \frac{\pi}{6}$ και $x = \frac{5\pi}{6}$.

Στο το διπλανό σχήμα παρατηρούμε ότι η $y = \eta\mu x$

βρίσκεται πάνω από την $y = \frac{1}{2}$ όταν $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$.



δ) Είναι $\varphi(x) = f(x) + 4 = 2\eta\mu x + 4$

$$-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\eta\mu x \leq 2 \Leftrightarrow 2 \leq 2\eta\mu x + 4 \leq 6 \Leftrightarrow 2 \leq \varphi(x) \leq 6$$

Η φ έχει ελάχιστο το 2 όταν $\eta\mu x = -1$, δηλαδή για $x = \frac{3\pi}{2}$ και μέγιστο το 6 όταν $\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$.