14ο Λύκειο Περιστερίου

Άλγεβρα Β΄ Λυκείου
Διαγώνισμα στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και εξισώσεις

Ομάδα: Α

Όνομα:…………………………………… Επώνυμο: ……………………………………… ημ/νία:

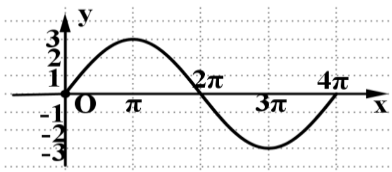
Θέμα Α

Να κυκλώσετε σε κάθε μια από τις παρακάτω ερωτήσεις την απάντηση που θεωρείτε σωστή:

1. Η εξίσωση $συνx = λ - 1$ έχει λύση όταν:

α) $λ > 2$ **β)** $λ < 0$ **γ)** $λ \in [0,2]$ **δ)** $λ - 1 \neq κπ$ **ε)** για κάθε $λ \in \mathbb{R}$

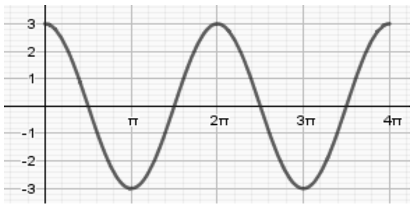
2. Η συνάρτηση που αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση του διπλανού σχήματος είναι η:



α) $y = 3ημ4x,\ x \in [0,4π]$ **β)** $y = 3συν2x,\ x \in [0,4π]$

γ) $y = 3ημ\frac{x}{2},\ x \in [0,4π]$ **δ)** $y = -3ημ\frac{x}{2},\ x \in [0,4π]$

3. Η συνάρτηση που αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση του διπλανού σχήματος είναι η:



α) $y = 3ημ2x,\ x \in [0,4π]$ **β)** $y = 3συν\frac{x}{2},\ x \in [0,4π]$

γ) $y = -3συν\frac{x}{2},\ x \in [0,4π]$ **δ)** $y = 3συν2x,\ x \in [0,4π]$

μονάδες 3x5

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2ημx$.

Β1. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x), \quad y = f(2x), \quad y = -f(x) \text{ στο } [0,2π].$$

μονάδες 15

Β2. Να βρείτε τις τιμές του $x \in [0,2π]$ για τις οποίες $f(x) > 1$.

μονάδες 15

Β3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $f\left(x + \frac{π}{3}\right) = f\left(x + \frac{π}{6}\right)$ **β)** $f\left(2x + \frac{π}{4}\right) = -f\left(x + \frac{π}{6}\right)$ **γ)** $2συν2x = f(x)$

μονάδες 3x10

Β4. Να λύσετε την εξίσωση $2συνx - f^2(x) + 2 = 0$,

μονάδες 15

Β5. Να βρείτε στο διάστημα $[0,2π)$ τα ακρότατα της συνάρτησης $φ(x) = f(x) + 4$. μονάδες 10

Άλγεβρα Β΄ Λυκείου
Διαγώνισμα στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και εξισώσεις

Ομάδα: Β

Όνομα:…………………………………… Επώνυμο: ………………………………………. ημ/νία:

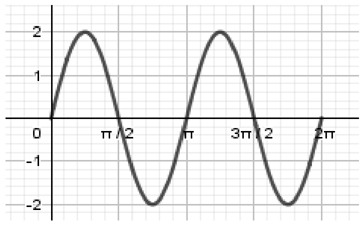
Θέμα Α

Να κυκλώσετε σε κάθε μια από τις παρακάτω ερωτήσεις την απάντηση που θεωρείτε σωστή:

1. Η εξίσωση $ημx = λ - 4$ έχει λύση όταν:

α) $λ \in (5, +\infty)$ **β)** $λ \in [3,5]$ **γ)** $λ \neq 4$ **δ)** $λ < 3$ **ε)** για κάθε $λ \in \mathbb{R}$

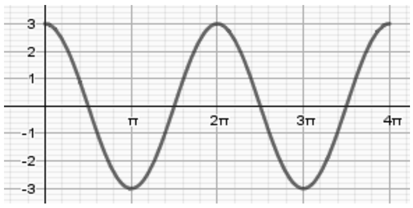
2. Η συνάρτηση που αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση του διπλανού σχήματος είναι η:



α) $y = 2ημx,\ x \in [0, 2π]$ **β)** $y = 2συν2x,\ x \in [0, 2π]$

γ) $y = 2ημ\frac{x}{2},\ x \in [0, 2π]$ **δ)** $y = 2ημ2x,\ x \in [0, 2π]$

3. Η συνάρτηση που αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση του διπλανού σχήματος είναι η:



α) $y = 3ημ2x,\ x \in [0, 4π]$ **β)** $y = 3συνx,\ x \in [0, 4π]$

γ) $y = -3συν\frac{x}{2},\ x \in [0, 4π]$ **δ)** $y = 3συν2x,\ x \in [0, 4π]$

μονάδες 3x5

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3ημx$.

Β1. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x), \quad y = f(2x), \quad y = -f(x) \text{ στο } [0, 2π].$$

μονάδες 15

Β2. Να βρείτε τις τιμές του $x \in [0, 2π]$ για τις οποίες $f(x) > \frac{3}{2}$.

μονάδες 15

Β3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $f\left(x - \frac{π}{6}\right) = f\left(x + \frac{π}{6}\right)$ **β)** $f\left(2x + \frac{π}{4}\right) = -f\left(x + \frac{π}{6}\right)$ **γ)** $3συν2x = f(x)$

μονάδες 3x10

Β4. Να λύσετε την εξίσωση $9συνx - 2f^2(x) + 9 = 0$.

μονάδες 15

Β5. Να βρείτε στο διάστημα $[0, 2π)$ τα ακρότατα της συνάρτησης $φ(x) = f(x) + 6$. μονάδες 10

Λύσεις

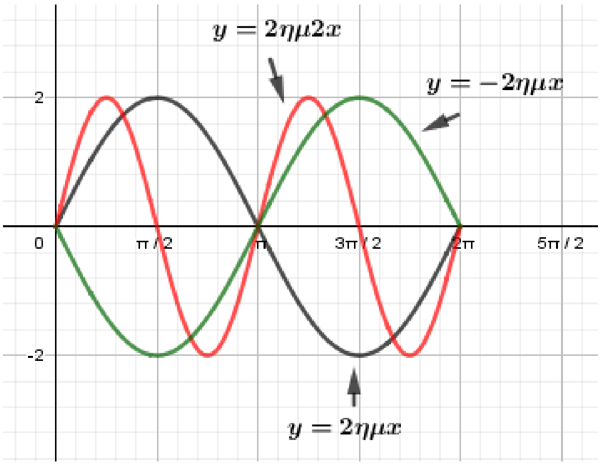
Ομάδα: Α

Θέμα Α

1. γ **2.** γ **3.** δ

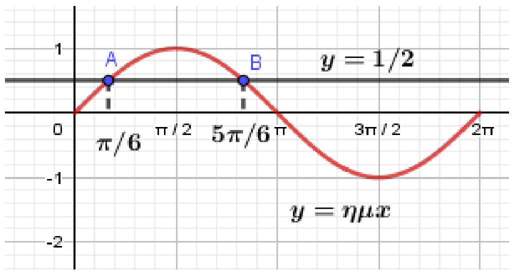
Θέμα Β

Β1. Είναι $f(x)=2\eta\mu x$, $g(x)=2\eta\mu 2x$, $h(x)=-2\eta\mu x$.



Β2. $f(x)>1 \Leftrightarrow 2\eta\mu x>1 \Leftrightarrow \eta\mu x>\frac{1}{2}$.

Τα σημεία τομής των $y=\eta\mu x$ και $y=\frac{1}{2}$ είναι τα σημεία με $\eta\mu x=\frac{1}{2}$, $x\in[0,2\pi]$, άρα είναι τα $x=\frac{\pi}{6}$ και $x=\frac{5\pi}{6}$.
Στο το διπλανό σχήμα παρατηρούμε ότι η $y=\eta\mu x$ βρίσκεται πάνω από την $y=\frac{1}{2}$ όταν $x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$.



Β3. α) $f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=f\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \cancel{2}\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cancel{2}\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$

$\left(\cancel{x}+\frac{\pi}{3}=2\kappa\pi+\cancel{x}+\frac{\pi}{6} \text{ αδύνατη}\right)$ ή $\left(x+\frac{\pi}{3}=2\kappa\pi+\pi-x-\frac{\pi}{6},\ \kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow\right.$ $2x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$2x=2\kappa\pi+\frac{7\pi}{6} \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{7\pi}{12},\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

β) $f\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-f\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \cancel{2}\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\cancel{2}\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu\left(-x-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$

$\left(2x+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi-x-\frac{\pi}{6} \text{ ή } 2x+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\pi+x+\frac{\pi}{6},\ \kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow\right)$

$\left(2x+x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4} \text{ ή } 2x-x=2\kappa\pi+\pi+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow$

$\left(3x=2\kappa\pi-\frac{5\pi}{12} \text{ ή } x=2\kappa\pi+\frac{11\pi}{12},\ \kappa\in\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow \left(x=\frac{2\kappa\pi}{3}-\frac{\pi}{36},\ \kappa\in\mathbb{Z} \text{ ή } x=2\kappa\pi++\frac{11\pi}{12}\right)$

γ) $2\sigma\upsilon\nu 2x = f(x) \Leftrightarrow \cancel{2}\sigma\upsilon\nu 2x = \cancel{2}\eta\mu x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow$

$\left(2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} - x \text{ ή } 2x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} + x,\ \kappa \in \mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow \left(3x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \text{ ή } x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow$

$\left(x = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \text{ ή } x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}\right)$

Β4. $2\sigma\upsilon\nu x - f^2(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x - 4\eta\mu^2 x + 2 = 0 \Leftrightarrow \cancel{2}\sigma\upsilon\nu x - \cancel{4}^{2}\left(1 - \sigma\upsilon\nu^2 x\right) + \cancel{2}^{1} = 0 \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu x - 2 + 2\sigma\upsilon\nu^2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$ (1)

Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu x = \omega$ και η (1) γίνεται $2\omega^2 + \omega - 1 = 0$, $\Delta = 9$, $\omega_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$ ή $\omega_2 = \frac{-1-3}{4} = -1$.

$\omega_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3},\ \kappa \in \mathbb{Z}$ ή

$\omega_2 = -1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}$.

Β5. Είναι $\varphi(x) = f(x) + 4 = 2\eta\mu x + 4$

$-1 \le \eta\mu x \le 1 \Leftrightarrow -2 \le 2\eta\mu x \le 2 \Leftrightarrow 2 \le 2\eta\mu x + 4 \le 6 \Leftrightarrow 2 \le \varphi(x) \le 6$

Η φ έχει ελάχιστο το 2 όταν $\eta\mu x = -1$, δηλαδή για $x = \frac{3\pi}{2}$ και μέγιστο το 6 όταν $\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$.

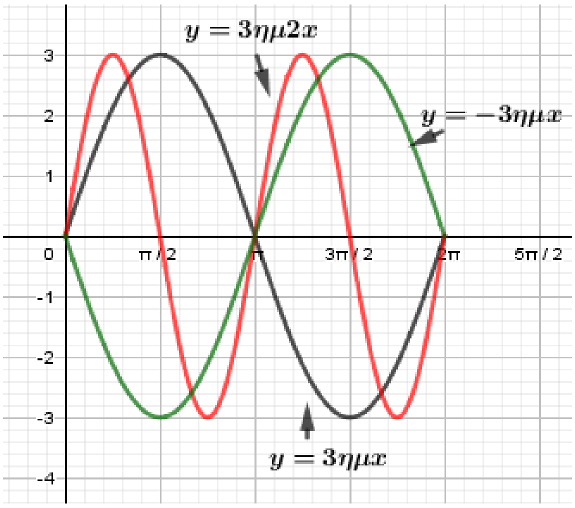
Ομάδα: Β

Θέμα Α

1. β **2.** δ **3.** β

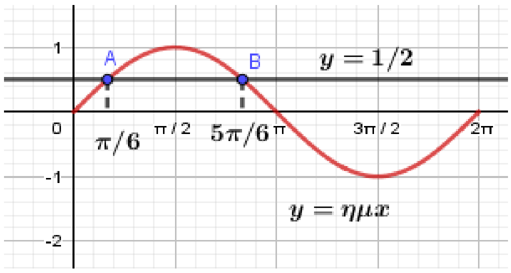
Θέμα Β

Β1. Είναι $f(x)=3\eta\mu x$, $g(x)=3\eta\mu 2x$, $h(x)=-3\eta\mu x$.



Β2. $f(x)>\frac{3}{2}\Leftrightarrow 3\eta\mu x>\frac{3}{2}\Leftrightarrow \eta\mu x>\frac{1}{2}$.

Τα σημεία τομής των $y=\eta\mu x$ και $y=\frac{1}{2}$ είναι τα σημεία με $\eta\mu x=\frac{1}{2}$, $x\in[0,2\pi]$, άρα είναι τα $x=\frac{\pi}{6}$ και $x=\frac{5\pi}{6}$. Στο το διπλανό σχήμα παρατηρούμε ότι η $y=\eta\mu x$ βρίσκεται πάνω από την $y=\frac{1}{2}$ όταν $x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$.



Β3. α) $f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow \cancel{3}\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cancel{3}\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow$

$\left(\cancel{x}-\frac{\pi}{6}=2\kappa\pi+\cancel{x}+\frac{\pi}{6}\text{ αδύνατη ή } x-\cancel{\frac{\pi}{6}}=2\kappa\pi+\pi-x-\cancel{\frac{\pi}{6}},\ \kappa\in\mathbb{Z}\right)\Leftrightarrow 2x=2\kappa\pi+\pi\Leftrightarrow$

$x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

β) $f\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow \cancel{3}\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\cancel{3}\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow \eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu\left(-x-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow$

$\left(2x+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi-x-\frac{\pi}{6}\text{ ή } 2x+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\pi+x+\frac{\pi}{6},\ \kappa\in\mathbb{Z}\right)\Leftrightarrow$

$\left(2x+x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\text{ ή } 2x-x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z}\right)\Leftrightarrow$

$\left(3x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{4}\text{ ή } x=2\kappa\pi+\frac{7\pi}{12},\ \kappa\in\mathbb{Z}\right)\Leftrightarrow\left(x=\frac{2\kappa\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\text{ ή } x=2\kappa\pi+\frac{7\pi}{12},\ \kappa\in\mathbb{Z}\right)$

γ) $3\sigma\upsilon\nu 2x = f(x) \Leftrightarrow \cancel{3}\sigma\upsilon\nu 2x = \cancel{3}\eta\mu x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow$

$\left(2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} - x \text{ ή } 2x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} + x,\ \kappa \in \mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow \left(3x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \text{ ή } x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow$

$\left(x = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \text{ ή } x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}\right)$

Β4. $9\sigma\upsilon\nu x - 2f^2(x) + 9 = 0 \Leftrightarrow 9\sigma\upsilon\nu x - 18\eta\mu^2 x + 9 = 0 \Leftrightarrow \cancel{9}\sigma\upsilon\nu x - \cancel{18}^{2}\left(1 - \sigma\upsilon\nu^2 x\right) + \cancel{9}^{1} = 0 \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu x - 2 + 2\sigma\upsilon\nu^2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$ (1)

Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu x = \omega$ και η (1) γίνεται $2\omega^2 + \omega - 1 = 0$, $\Delta = 9$, $\omega_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$ ή $\omega_2 = \frac{-1-3}{4} = -1$.

$\omega_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3},\ \kappa \in \mathbb{Z}$ ή

$\omega_2 = -1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}$.

Β5. Είναι $\varphi(x) = f(x) + 6 = 3\eta\mu x + 6$

$-1 \le \eta\mu x \le 1 \Leftrightarrow -3 \le 3\eta\mu x \le 3 \Leftrightarrow 3 \le 3\eta\mu x + 6 \le 9 \Leftrightarrow 3 \le \varphi(x) \le 9$

Η φ έχει ελάχιστο το 3 όταν $\eta\mu x = -1$, δηλαδή για $x = \frac{3\pi}{2}$ και μέγιστο το 9 όταν $\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$.