Σταρατζής Εμμανουήλ Α4 2017-2018 Μαθηματικά

» Ιστορία του υπερβατικού αριθμου π «

Ιστορική αναδρομή:

Ο αριθμός π ή αλλιώς 3,14159265... ορίζεται ως μία μαθηματική σταθερα η οποία αποτελεί το λόγο της περιφέρειας προς τη διαμετρο ενός κύκλου. Ωστόσο για να φτάσουμε στα τρισεκατομύρια πλεον γνωστά ψηφία αυτού του αρρητου αριθμού περασαν χιλιάδες χρόνια, απο την αρχαιότητα εως σημερα. Ας ταξιδεψουμε λοιπον στο παρελθόν για να δουμε την ιστορία αυτου του αρρητου αριθμου...

Η ιστορία μας ξεκινά στη Βαβυλώνα οπου συναντάται η πρώτη προσέγγιση του αριθμου, το 1900 πΧ. Ο π ορίζεται ως 25/8 ή ως 3,1250. Το 1650 πΧ έχουμε αναφορά του π ως $(16/9)^2 \approx 3.1605$.
Έπειτα, το 600 πΧ στην Ινδία σε κείμενο του Shulba Sutras (σανσκριτικα κείμενα με μαθηματικο περιεχόμενο) ο αρρητος προσεγγίζεται ως $(9785/5568)^2 = 3.088$, ενω το 150 πΧ στην ίδια χωρα το π ορίζεται ως $\sqrt{10} \approx 3,1622$. Στην αρχαία Ελλάδα ο Πλούταρχος χρησιμοποιεί τη φράση » Αει ο θεός ο μέγας γεωμετρεί « για την ευκολοτερη μνημονευση του π ως 3,14159.
Το 250 πΧ ο Αρχιμήδης φτιάχνει έναν αλγόριθμο με μια γεωμετρική προσεγγιση βασισμένη σε πολύγωνα η οποία κυριαρχεί για τα επόμενα 1.000 χρόνια. Αποδεικνύει λοιπόν οτι $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ ή οτι $3,1408 < \pi < 3,1429$. Για αυτό και ο π αποκαλείται και ως η » Σταθερά του Αρχιμήδη «. Μεσω των γεωμετρικων αλγορίθμων με πολύγονα φτάνουμε στην ανακάλυψη 39 ψηφίων το 1630, ρεκόρ που θα σπάσει μόνο το 1699 με τη χρήση απειρων σειρών για την ανακάλυψη 71 ψηφίων.

Γυρω στο 1 μ.Χ στην αρχαία Κίνα το π δηλώνεται ως 3.1547, $\sqrt{10}$ το 100 μΧ και 3.1556 τον 3ο αιώνα μ.Χ. Το 480 μ.Χ ο Κινέζος μαθηματικός Zu Chongzhi ορίζει το π ως 355/113 και με χρηση πολύγωνου ορίζει τα πρώτα 7 ψηφια του π (3,141592920) η οποία προσεγγιση επικρατεί για τα επόμενα 800 χρόνια. Ο Ινδος αστρονόμος Aryabhata το 499 μΧ ορίζει το π ως 3.1416 χρησιμοποιώντας διαφορετική πολυγωνική μέθοδο από αυτή του Αρχιμήδη. Επόμενη προσέγγιση γίνεται το 1424 όπου ο Πέρσης αστρονόμος Jamshid al-Kashi βρήκε 16 ψηφία με χρήση πολυγώνου, ρεκόρ που θα επικρατήσει για τα επόμενα 180 χρόνια. Έτσι το 1596 ανακαλύπτονται 20 ψηφία του π από τον Ολλανδό μαθηματικό Ludolph van Ceulen. Το 1630 γίνεται η ανακάλυψη 39 ψηφίων από τον Αυστριακό Christoph Grienberger.

Τον 16ο και 17ο αιώνα γίνεται η ανακάλυψη των απειροσειρών και επιτρέπεται η προσέγγιση του π με μεγαλύτερη ακρίβεια από τον Αρχιμήδη. Το 1699 ο Άγγλος μαθηματικός Abraham Sharp υπολογίζει 71 ψηφία σπάζοντας το ρεκόρ των 39 ψηφίων (1630). Το 1706 ο John Machin φτιάχνει τον αλγόριθμο $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$ και φτάνει τα 100 ψηφία. Το 1844 υπολογίζονται 200 ψηφία από τον Zacharias Dase με χρήση τύπου εμπνευσμένου από τον Machin.

Έπειτα την ανακάλυψη των ηλεκτρονικών υπολογιστών το 1949 με χρήση αριθμομηχανής γραφείου οι Αμερικανοί μαθηματικοί John Wrench και Levi Smith βρίσκουν 1129 ψηφία του π. Το 1973 ο υπολογιστής ENIAC καταγράφει τον υπολογισμό ενός εκατομμυρίου ψηφίων. Το 1989 με τη χρήση του τύπου των αδερφών Chudnovsky: $\frac{426880\sqrt{10005}}{\pi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(6k)!\,(13591409+545140134k)}{(3k)!\,(k!)^3\,(-640320)^{3k}}$ ανακαλύπτονται ένα δισεκατομμύριο ψηφία, ενώ το 2011 ανακαλύπτονται με τον ίδιο τύπο 10 τρισεκατομμύρια ψηφία από τους Alexander Yee και Shigeru Kondo.

Επίσης στο Δυτικό Βασίλειο στη Κίνα το 265 μΧ ο μαθηματικός Liu Hui δημιουργεί ένα πολύγωνο με βάση έναν επαναληπτικό αλγόριθμο για να ορίσει τον π ως 3,1416. Μετέπειτα ανακάλυψε μια γεωμετρική σειρά με συντελεστή το 4 που προκύπτει σύμφωνα με το ότι διάφορες τιμές στην περιοχή διαδοχικών πολυγώνων δημιουργούν αυτή τη σειρά. Το 1424 ο Πέρσης αστρονόμος Jamshid al-Kashi βρίσκει 16 ψηφία με τη χρήση του αλγόριθμου του Αρχιμήδη. Το 1630 ο Αυστριακός Christoph Grienberger ανακαλύπτει 39 ψηφία με τη χρήση του ίδιου γεωμετρικού αλγόριθμου με χρήση πολυγώνων.

Άπειρες Σειρές

Μια σειρά στα μαθηματικά ορίζεται το άθροισμα των όρων μιας ακολουθίας (ακολουθία ⇒ μια λίστα αντικειμένων με καθορισμένη διάταξη).

πχ $S_n = a_1 + \dots a_n$

ή διαφορετικά

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

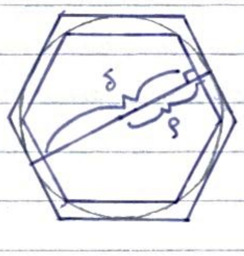
Έτσι ένα παράδειγμα μαθηματικής άπειρης σειράς είναι το παράδοξο το Ζήνωνα για τη διχοτόμηση όπου:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \dots$$

Οι όροι μιας σειράς παράγονται σύμφωνα με κάποιο κανόνα ή με κάποιο αλγόριθμο. Όταν το πλήθος των όρων είναι άπειρο τότε έχουμε μια άπειρη σειρά. Για αυτό για να μπορέσουν να χρησιμοποιηθούν χρειάζεται να περιοριστούν από όρια.

Τρόποι ευρεσης του αριθμου π

Η πρώτη προσεγγιση του αριθμού γίνεται το 1900 πΧ (Μεσοποταμία), όπου ο αριθμός ορίζεται ως 25/8 ή ως 3,1250. Το 1650 πΧ στο παπυρο Rhind ο π αναφέρεται ως $(16/9)^2 \approx 3.1605$. Η πρώτη αυστηρή προσεγγιση του π γίνεται με χρήση πολυγώνων. Ο πρώτος που υπολογίζει τον π με ακρίβεια γύρω στο 250 μΧ είναι ο Αρχιμήδης, ο οποίος τον ορίζει ως $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ ή αλλιώς $3,1408 < \pi < 3,1429$. Ο Αρχιμήδης υπολόγισε τα όρια του αριθμού σχεδιάζοντας ένα περιγεγραμμένο και ένα εγγεγραμμένο εξάγωνο σε ένα κύκλο. Ετσι άρχισε να διπλασιάζει τον αριθμο των πλευρών ώσπου κατέληξε σε πολύγωνα με 96 πλευρές και υπολογίζοντας τις περιμέτρους των πολυγώνων προσέγγισε τα όρια του π. Αυτό συμβαίνει γιατί ένα πολύγωνο με περισσότερες πλευρές προσομοιώνει καλύτερα ένα κύκλο και έτσι έχουμε μεγαλύτερη ακρίβεια. Επίσης, την εποχή που έζησε ο Αρχιμήδης δεν υπήρχαν τα μέσα για τη μέτρηση καμπύλων γραμμών παρα μόνο ευθύγραμμων τμημάτων. Αυτή ήταν η αιτία που καθιστούσε τόσο δύσκολη την ευρεση του π, και ο λόγος για τον οποίο ο Αρχιμήδης χρησιμοποίησε πολύγωνα.



$\frac{\text{περίμετρο}}{\text{διάμετρο}}$ Για παράδειγμα σε κανονικό δωδεκάγωνο (ενδεικτικα):

$\frac{59.5}{18.5} = 3,216216...$

πλευρά 4,9583... cm

Ενώ για κανονικό εννενηνταεξαγωνο (ενδεικτικα):

$\frac{314,1}{100} = 3,141$

πλευρά: 3,271875 cm

Οι προσέγγιση με απειροσειρές επιτυγχάνεται πρώτη φορά στην Ινδία γύρω στο 1400 με 1500 μΧ. Ενημερωνόμαστε για αυτές από στίχους σε βιβλία ή ποιήματα Τανγρασαμγκραχα συνήθως χωρίς ιδιαίτερες αποδείξεις. Η πρώτη άπειρη σειρά που ανακαλύπτεται στην Ευρώπη γίνεται από το Γάλλο μαθηματικό François Viète το 1593.

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$$

Ο Ισαακ Νιούτον μαζί με τον Άγγλο μαθηματικό Λέιμπνιζ (Leibniz) ανακαλύπτουν το λογισμό που βοήθησε στην ανακάλυψη ακόμα περισσότερων σειρών (λογισμός ⇒ μαθηματική μελέτη της αλλαγής)
Μια ακόμα σειρά είναι η σειρά του Σκωτσέζου James Gregory και του Leibniz το 1671 η οποία χρησιμοποιήθηκε για τη δημιουργία πολλών άλλων σειρών και για την εύρεση 71 ψηφίων του π. Τέλος ο John Machin χρησιμοποιώντας τη σειρά Gregory-Leibniz έφτιαξε τον αλγόριθμο Machin που βρίσκει νέα ψηφία πιο γρήγορα, με αποκορύφωμα 620 ψηφία το 1946.

Αρρητότητα

Κάποιες σειρές είναι πιο αποτελεσματικές από άλλες. Έτσι σιγά σιγά πλησιάζουμε τον αριθμό π, απλά πιο γρήγορα.

πχ σειρά Gregory-Leibniz $\pi = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} \ldots$ βρίσκει

+4

3,3396 μετά τον 5° όρο

Ενώ η σειρά $\pi = 3 + \frac{4}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{4}{4\cdot 5\cdot 6} \ldots$ βρίσκει

+2

3,1396 μετά τον 5° όρο, προσεγγίζει τον π γρηγορότερα από την Gregory-Leibniz

Εποχη ηλεκτρονικών υπολογιστών

Επειτα απο την ανακάλυψη των Η/Υ το 1949 με τη χρήση αριθμομηχανής γραφείου οι Αμερικάνοι μαθηματικοί John Wrench και Levi Smith βρίσκουν 1192 ψηφία του αριθμου. Το 1973 μεσω του ηλεκτρονικού υπολογιστή ENIAC ανακαλυπτονται ενα εκατομύρια ψηφια. Πολύ σημαντική ήταν και η ανακάλυψη του τυπου των αδερφων Chudnovsky μεσω του οποιου το 1989 ανακαλύπτονται ένα δισεκατομύρια ψηφια. Με χρήση του ίδιου τύπου το 2011 ανακαλυπτονται 10 τρισεκατομύρια ψηφια από τους Alexander Yee και Shigeru Kondo.

Σταρατζής Εμμανουήλ