# ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

## Λίγα λόγια για τον Πυθαγόρα

Πυθαγόρας ο Σάμιος (580 π.Χ. - 496 π.Χ.) ήταν σημαντικός Έλληνας φιλόσοφος, μαθηματικός, γεωμέτρης και θεωρητικός της μουσικής. Παντρεύτηκε την φιλόσοφο και επιστήμονα Θεανώ. Είναι ο κατεξοχήν θεμελιωτής των ελληνικών μαθηματικών, δημιούργησε ένα άρτιο σύστημα για την επιστήμη των ουρανίων σωμάτων που κατοχύρωσε με όλες τις σχετικές αριθμητικές και γεωμετρικές αποδείξεις και ήταν ιδρυτής ενός μυητικού φιλοσοφικού κινήματος που λέγεται Πυθαγορισμός. Επειδή οι περισσότερες πληροφορίες γράφτηκαν πολλούς αιώνες μετά τον θάνατό του, πολύ λίγες αξιόπιστες πληροφορίες είναι γνωστές γι' αυτόν. Συχνά αναφέρεται ως σπουδαίος μαθηματικός και επιστήμονας και **είναι γνωστός για το Πυθαγόρειο Θεώρημα που έχει το όνομά του**. Γεννήθηκε περίπου το 580 π.Χ. και ως επικρατέστερος τόπος γεννήσεως παραδίδεται η Σάμος. Γύρω στο 530 π.Χ. μετακόμισε σε μία ελληνική αποικία στη νότια Ιταλία. Οι υποστηρικτές του Πυθαγόρα ακολούθησαν τις πρακτικές που ανέπτυξε και μελέτησαν τις φιλοσοφικές του θεωρίες. Τα μέρη συνάντησης των Πυθαγόρειων κάηκαν και ο Πυθαγόρας αναγκάστηκε να φύγει από την πόλη. Πέθανε στο Μεταπόντιον της Ιταλικής Λευκανίας σε ηλικία 84 ετών το 496 π.Χ.

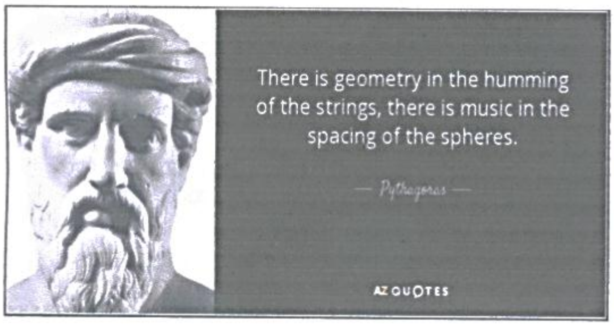
## Ορισμός

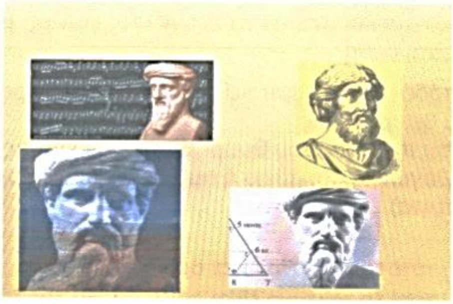
***«Εν τοις ορθογωνίοις τριγώνοις το από της την ορθήν γωνίαν υποτεινούσης πλευράς τετράγωνον ίσον εστί τοις από των την ορθήν γωνίαν περιεχουσών πλευρών τετραγώνοις».***

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα: Το τετράγωνο της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δυο καθέτων πλευρών. Η παραπάνω έκφραση εκφράζεται με τον ακόλουθο τύπο:

$$\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$$

(όπου γ = το μήκος της υποτείνουσας και α και β = τα μήκη των δυο άλλων πλευρών)



Το **Πυθαγόρειο θεώρημα** αποτελεί ένα από τα πιο **σημαντικά θεωρήματα** με πολλές εφαρμογές. Η ανακάλυψη του θεωρήματος, αν και παραδοσιακά αποδίδεται στον Πυθαγόρα τον Σάμιο, δεν είναι βέβαιο ότι έγινε από αυτόν ή από κάποιον από τους μαθητές του στην Πυθαγόρεια Σχολή που ίδρυσε. Όμως είναι βέβαιο πως είτε ο ίδιος είτε οι μαθητές του διατύπωσαν την **πρώτη απόδειξη**. Επίσης, οι Πυθαγόρειοι διατύπωσαν και απέδειξαν το αντίστροφο του θεωρήματος. Πολλοί μαθηματικοί, διάσημοι και μη, προσπάθησαν να αποδείξουν το Πυθαγόρειο θεώρημα με δική τους ανεξάρτητη μέθοδο. Ανάμεσα τους, ο Leonardo Da Vinci και ο πρόεδρος των ΗΠΑ, Garfield.

## Προέλευση

- Αποδίδεται στον Πυθαγόρα, όμως ιστορικά δεδομένα αποδεικνύουν τη γνώση και τη χρήση του από τους Βαβυλωνίους, καθώς και τους Ινδούς και τους Κινέζους της εποχής του.
- Κανείς από αυτούς τους λαούς όμως δεν έδωσε κάποια λογική απόδειξη μέχρι να δοθεί αυτή του Πυθαγόρα.
- Πιο συγκεκριμένα φαίνεται από ιστορικές έρευνες ότι είχε διατυπωθεί και νωρίτερα, ως εμπειρική παρατήρηση, γύρω στο 800 π.Χ., στην Ινδία από τον Baudhayana, στο βιβλίο Baudhayana Sulba Sutra(οδηγίες για κατασκευή ναών): Το σχοινί που εκτείνεται κατά μήκος της διαγώνιου ενός ορθογωνίου, παράγει επιφάνεια ίδια με αυτή της κάθετης και της οριζόντιας πλευράς. Από αιγυπτιακά μεγαλιθικά μνημεία των οποίων οι πλευρές είναι ακέραια πολλαπλάσια , φαίνεται ότι οι ιδιότητες των ορθογωνίων τριγώνων και οι σχέσεις των πλευρών τους, ήταν γνωστές από παλιά. <u>Ο Πυθαγόρας όμως απέδειξε το Πυθαγόρειο θεώρημα με θεωρητική γεωμετρία χρησιμοποιώντας λογικές αποδείξεις, κανόνα και διαβήτη.</u>
- Σήμερα το θεώρημα μετρά πάνω από 400 αποδείξεις, με τον αριθμό τους να αυξάνεται συνεχώς.

## Αντίστροφο

Ισχύει και το αντίστροφο του θεωρήματος:

Για κάθε θετικούς αριθμούς α,β και γ τέτοιους ώστε $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$, υπάρχει τρίγωνο με πλευρές α,β και γ, και σε κάθε τέτοια τρίγωνο η γωνία που σχηματίζουν οι πλευρές α και β είναι ορθή.

<u>Το αντίστροφο εμφανίζεται και στα στοιχεία του Ευκλείδη:</u>"Αν σε ένα τρίγωνο το τετράγωνο της μίας πλευράς ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που αυτές σχηματίζουν είναι ορθή"

<u>Αποδεικνύεται με το νόμο των συνημιτόνων ή ως εξής:</u>
Έστω ΑΒΓ, τρίγωνο με πλευρές α,β,γ και $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$. Κατασκευάζω ένα δεύτερο τρίγωνο με πλευρές μήκους α και β που να σχηματίζουν ορθή γωνία. Τότε λόγω του θεωρήματος, για την υποτείνουσα αυτού του τριγώνου ισχύει: $\chi = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ που ισούται με την υποτείνουσα του πρώτου τριγώνου. Αφού τα τρίγωνα έχουν ίσα μήκη πλευρών, τα τρίγωνα ταυτίζονται και πρέπει να έχουν ίσες γωνίες. Επομένως, η γωνία μεταξύ των πλευρών α και β στο αρχικό τρίγωνο είναι ορθή.

Η παραπάνω απόδειξη χρησιμοποιεί το ίδιο το πυθαγόρειο θεώρημα. Το αντίστροφο μπορεί να αποδειχθεί και χωρίς χρήση του θεωρήματος.
Το αντίστροφο του πυθαγορείου θεωρήματος έχει επίσης οδηγήσει σε έναν απλό τρόπο διαπίστωσης εάν ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο, οξυγώνιο ή αμβλυγώνιο. Έστω γ η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου και α+β>γ (τριγωνική ανισότητα)

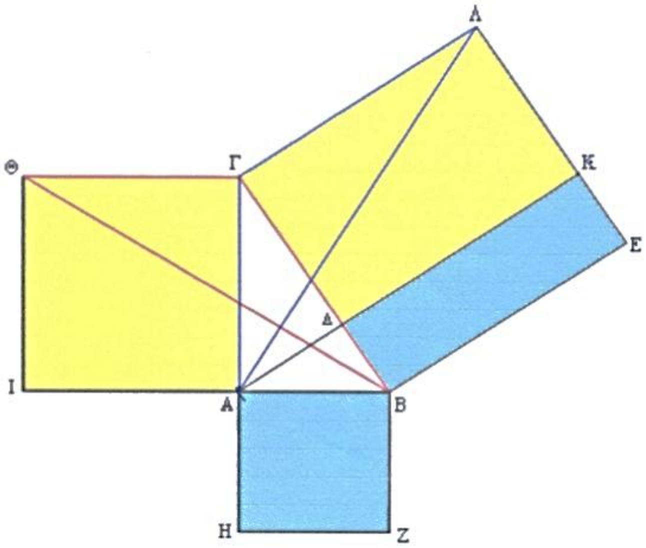
- Αν $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο
- Αν $\alpha^2+\beta^2>\gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο
- Αν $\alpha^2+\beta^2<\gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι οξυγώνιο

## Συμπέρασμα

Το Πυθαγόρειο θεώρημα έχει μια πολύ συχνή παρουσία στην ιστορία των μαθηματικών. Χρησιμοποιήθηκε και χρησιμοποιείται εκτός από τον τομέα των μαθηματικών και στις θετικές επιστήμες και σε άλλους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας. Πάρα πολλοί επίσης είναι οι επιστήμονες που έχουν ασχοληθεί με αυτό το θεώρημα. Ίσως δεν είναι τυχαίες οι τόσες πολλές αποδείξεις του από διαφορετικούς πολιτισμούς και ανθρώπους. Είναι ένα θεώρημα που από τότε που δημιουργήθηκε, αξιοποιήθηκε πάρα πολύ και μας διδάσκει ακόμα. Ο Loomis E.S. Elisha Scott (1940) δίνει 370 διαφορετικές αποδείξεις του Πυθαγόρειου Θεωρήματος. Οι αποδείξεις ως σήμερα έχουν γίνει (Μαθηματικός) περισσότερες.

## Μερικές αποδείξεις

### 1. Απόδειξη του Ευκλείδη

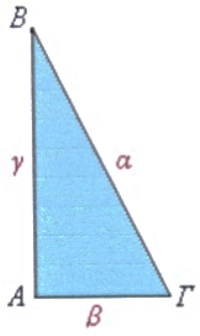


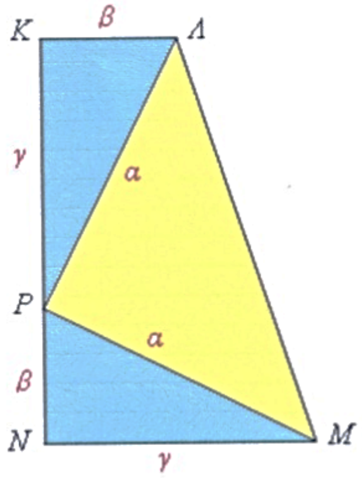

Η απόδειξη του Ευκλείδη είναι γεωμετρική και στηρίζεται στο παραπάνω σχήμα. Ο Ευκλείδης απέδειξε ότι τα τετράγωνα ΑΓΘΙ και ΑΒΖΗ έχουν το ίδιο εμβαδόν με τα ορθογώνια ΓΛΚΔ και ΒΔΚΕ αντίστοιχα. Για την απόδειξη της πρώτης ισεμβαδικότητας χρησιμοποίησε την ισότητα των τριγώνων ΒΓΘ και ΑΓΛ και το ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΘ είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του τετραγώνου ΑΓΘΙ, επειδή έχουν την ίδια βάση ΘΓ και η κορυφή Β είναι σημείο της ευθείας ΙΑ, η οποία είναι παράλληλη της ΘΓ. Για τον ίδιο λόγο και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΛ είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του ορθογωνίου ΓΛΚΔ[5]. Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται και η ισεμβαδικότητα των σχημάτων ΑΒΖΗ και ΒΔΚΕ.

Το Πυθαγόρειο θεώρημα [redacted] διατυπώνεται [redacted]) ως εξής:

*«Εν τοις ορθογωνίοις τριγώνοις το από της την ορθήν γωνίαν υποτεινούσης πλευράς τετράγωνον ίσον εστί τοις από των την ορθήν γωνίαν περιεχουσών πλευρών τετραγώνοις».*

## 2. Απόδειξη του James Abram Garfield




Ο James Abram Garfield το 1876 για το Πυθαγόρειο θεώρημα έδωσε μία πολύ ωραία αλγεβρική απόδειξη, η οποία στηρίζεται στο παραπάνω τραπέζιο.

Η απόδειξη προκύπτει αν εκφράσουμε το εμβαδόν του τραπεζίου ΚΛΜΝ με δύο τρόπους, με τον τύπο του εμβαδού του τραπεζίου και ως άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων τριγώνων ΚΛΡ, ΡΛΜ και ΝΡΜ που το διαμερίζουν.
Έτσι έχουμε:

$$(\text{ΚΛΜΝ}) = \frac{(\gamma+\beta)\cdot(\beta+\gamma)}{2} = \frac{\beta\cdot\gamma}{2} + \frac{\beta\cdot\gamma}{2} + \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma = 2\beta\gamma + \alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$$

Ευαγγελία Πόρα Α4'
Εργασία στη Γεωμετρία