ΕΡΓΑΣΙΑ

«Η ακολουθία Fibonacci»

Μάθημα: **Άλγεβρα**

Υπεύθυνος καθηγητής: **κ. Μιχαήλογλου**

Τάξη: **Α΄ Λυκείου**

Τμήμα: **Α΄ 4**

Ονοματεπώνυμο: **Στέλλα Ψύχα**

Σχολικό έτος: **2017 – 2018**

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελίδα

1. Βιογραφία του Leonardo Fibonacci …………………….. 1

2. Εισαγωγικά για την ακολουθία Fibonacci ……………… 3

3. Η ιστορία της ακολουθίας Fibonacci και το πρόβλημα που οδήγησε στη δημιουργία της ………………………………... 4

4. Σχέση της ακολουθίας Fibonacci με άλλες μαθηματικές έννοιες ……………………………………………………. 6

5. Σχέση της ακολουθίας Fibonacci με άλλους επιστημονικούς τομείς …………………………………………………... 9

1. Βιογραφία του Leonardo Fibonacci

Ο Λεονάρντο της Πίζας (Σεπτέμβριος 1175 – 1240), γνωστός ως και ο Λεονάρντο Πιζάνο (Leonardo Pisano) ή Φιμπονάτσι (Fibonacci) ήταν Ιταλός μαθηματικός που έμεινε στην ιστορία για την περίφημη ακολουθία Fibonacci και για την εισαγωγή στην Ευρώπη του αραβικού δεκαδικού συστήματος αρίθμησης καθώς και άλλων μαθηματικών καινοτομιών σε μια σκοτεινή εποχή για τις επιστήμες στην Ευρώπη.

Ήταν γιος του Γκιγιέρμο Μπονάτσι (Bonacci, που σημαίνει απλός), εξού και το παρώνυμό του Fibonacci (γιος του Μπονάτσι: φίλιους μπονάτσι). Ο ίδιος χρησιμοποιούσε μερικές φορές το όνομα Μπίγκολο που σημαίνει ταξιδιώτης. Γεννήθηκε στην Πίζα αλλά ακολούθησε τον πατέρα του που διορίστηκε σε διπλωματικό πόστο ως εκπρόσωπος των εμπόρων της Πίζας στη Βόρεια Αφρική. Έζησε στην πόλη Μπεχάια, λιμάνι στη σημερινή Αλγερία, στις εκβολές του ποταμού Γουάντι Σουμάμ κοντά στο όρος Γκουράια και στον κόλπο Καρμπόν. Εκεί εκπαιδεύτηκε σε σχολή λογιστικής, διδάχτηκε μαθηματικά και ταξίδεψε με τον πατέρα του γνωρίζοντας τα τεράστια προνόμια των αραβικών μαθηματικών συστημάτων.

Αυτά τα πρώτα του ταξίδια τελειώνουν γύρω στο 1200 και τότε επιστρέφει στην Πίζα όπου γράφει τα μαθηματικά κείμενα τα οποία είμαστε και τυχεροί να κατέχουμε καθώς την εποχή του δεν έχει εφευρεθεί η τυπογραφία. Το 1202 δημοσιεύει το liber abaci ή βιβλίο των υπολογισμών, γεμάτο με τις μαθηματικές γνώσεις που είχε περισυλλέξει στα ταξίδια του. Έδειχνε την πρακτικότητα του αραβικού αριθμητικού συστήματος στην τήρηση εμπορικών βιβλίων, στις χρηματικές συναλλαγές, τις μετατροπές των μέτρων και σταθμών, στον υπολογισμό των επιτοκίων και άλλες εφαρμογές. Το βιβλίο έτυχε θερμής υποδοχής ανάμεσα στους λογίους της Ευρώπης και τους επηρέασε σημαντικά αν και το σύστημα έγινε ευρέως γνωστό μετά την εφεύρεση της τυπογραφίας.

Ο αυτοκράτορας Φρειδερίκος Β΄ της Αγίας Ρωμαϊκής Αυτοκρατορίας ήταν σύμμαχος της πολιτείας της Πίζας στον πόλεμό της κατά της Γένοβας και ενισχύθηκε τόσο πολύ η επιρροή του στην Ιταλία, που το 1224 ίδρυσε το Πανεπιστήμιο της Νάπολης για να αντλεί επιστήμονες και ανθρώπινο δυναμικό. Γνώρισε το έργο του Fibonacci μέσω των λογίων της αυλής και ένας από αυτούς, ο Δομίνικος Ισπανός, φιλόσοφος της αυλής, του συνέστησε να συναντήσει τον Fibonacci στη επίσκεψη της αυλής στην Πίζα το 1225.

Ο Ιωάννης του Παλέρμο, ένα άλλο μέλος της αυλής του Φρειδερίκου Β΄, παρουσίασε στον Fibonacci έναν αριθμό προβλημάτων – προκλήσεων, τρία από τα οποία όντως έλυσε. Όμως στη συνέχεια τα ίχνη του χάνονται καθώς μετά το 1228 υπάρχει μόνο μία αναφορά του ονόματός του σε διασωθέντα κείμενα, σε ένα έγγραφο μισθοδοσίας του 1240 από την Πολιτεία της Πίζα.

Άγαλμά του υπάρχει στο νεκροταφείο δίπλα στον Καθεδρικό Ναό της Πίζας, κοντά στον περίφημο πύργο. Το όνομά του έχει δοθεί σε δύο δρόμους της πόλης της Πίζας και σε δύο αντίστοιχα της Φλωρεντίας.

2. Εισαγωγικά για την ακολουθία Fibonacci

«Οι αριθμοί Fibonacci είναι το αριθμητικό σύστημα της φύσης. Εμφανίζονται παντού στη φύση, από τη διάταξη των φύλλων στα φυτά μέχρι το μοτίβο των πετάλων στα λουλούδια, τις πευκοβελόνες ή τα στρώματα του φλοιού ενός ανανά. Φαίνεται πως οι αριθμοί Fibonacci σχετίζονται με την ανάπτυξη κάθε ζωντανού οργανισμού, ενός κυττάρου, ενός σπυριού σιταριού, μιας κυψέλης μελισσών, ακόμα της ίδια της ανθρωπότητας».

Οι αριθμοί 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, … είναι οι αριθμοί της ακολουθίας Fibonacci. Εξ ορισμού, οι πρώτοι δύο αριθμοί Fibonacci είναι το 0 και το 1, και κάθε επόμενος αριθμός είναι το άθροισμα των δύο προηγούμενων.

Σε μαθηματικούς όρους, η ακολουθία F_n των αριθμών Fibonacci ορίζεται από τον αναδρομικό τύπο: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ με $F_0 = 0$ και $F_1 = 1$.

Ο λόγος δύο διαδοχικών αριθμών της ακολουθίας τείνει προς την αποκαλούμενη **Χρυσή Τομή** ή **Χρυσή Αναλογία** ή **Αριθμό φ** = 1,618033989. Ο αντίστροφος της Χρυσής Τομής είναι $1/\varphi = 0,618033989$ με αποτέλεσμα να ισχύει: $1/\varphi = \varphi - 1$.

3. Η ιστορία της ακολουθίας Fibonacci και το πρόβλημα που οδήγησε στη δημιουργία της

Η ακολουθία Fibonacci εμφανίζεται στα Μθηματικά των Ινδών και συγκεκριμένα σε Σανσκριτικές Προσωδίες. Στην Σανσκριτική προφορική παράδοση, δίνονταν μεγάλη έμφαση κατά πόσο οι μακρόσυρτες συλλαβές (Μ) συνέπιπταν με τις σύντομες (Σ) και μετρούσαν τα διαφορετικά πρότυπα των Μ και των Σ μέσα σε ένα προκαθορισμένο διάστημα, κάτι που οδήγησε στους αριθμούς Fibonacci. Ο αριθμός των προτύπων που γίνονται m σύντομες συλλαβές μακρόσυρτες είναι ο αριθμός Fibonacci F_{m+1}.

Η ανάπτυξη της ακολουθίας αποδίδεται στον Pingala (200 π.Χ.), αλλά η πρώτη ξεκάθαρη αναφορά στην ακολουθία γίνεται στα έργα του Virahanka (700 μ.Χ), τα έργα του οποίου δε σώζονται, αλλά μεταφέρθηκαν αυτούσια στα έργα του Gopala (1153 μ.Χ.).

Στη Δύση, οι αριθμοί Fibonacci εμφανίζονται για πρώτη φορά στο βιβλίο Liber Abaci (1202) του Λεονάρντο της Πίζας, γνωστού και ως Fibonacci. Ο όρος «Ακολουθία Fibonacci» χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά τον $19^{ο}$ αιώνα από τον Γάλλο μαθηματικό Εδουάρδο Λούκας.

Οι αριθμοί Fibonacci προέκυψαν ως λύση του παρακάτω προβλήματος, το οποίο περιέχεται στο κεφάλαιο 12 του βιβλίου του Fibonacci, «Liber abaci»:

Το πρόβλημα με τα κουνέλια

Ας υποθέσουμε ότι σ'ένα πληθυσμό κουνελιών κάθε ενήλικο ζευγάρι γεννά κάθε μήνα από ένα ζευγάρι κουνέλια (ένα αρσενικό και ένα θηλυκό). Τα νεογέννητα ενηλικιώνονται το δεύτερο μήνα οπότε και γεννούν το πρώτο ζευγάρι τους. Υποθέτουμε ακόμα ότι τα κουνέλια δεν πεθαίνουν ποτέ. Το ερώτημα που έθεσε ο Fibonacci ήταν: πόσα ζεύγη κουνελιών θα έχουν γεννηθεί μέσα σε ένα έτος;

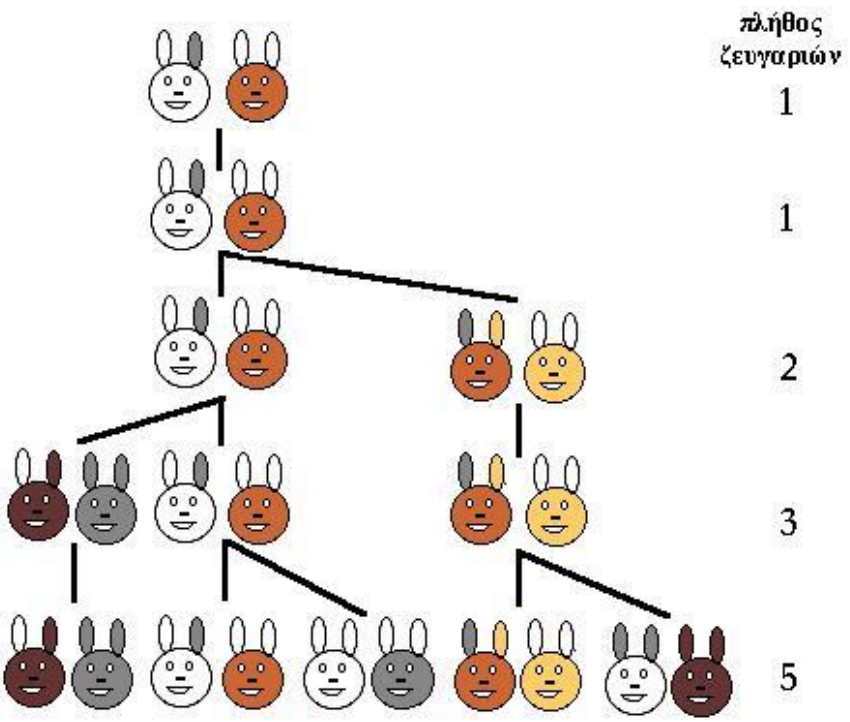
Λύση

- Στο τέλος του δεύτερου μήνα το θηλυκό γεννάει ένα νέο ζεύγος, οπότε στο χωράφι υπάρχουν δύο ζεύγη κουνελιών.
- Στο τέλος του τρίτου μήνα, το πρώτο θηλυκό γεννάει και δεύτερο ζεύγος, οπότε έχουμε τρία ζεύγη κουνελιών.
- Στο τέλος του τέταρτου μήνα, το πρώτο θηλυκό γεννάει ακόμη ένα ζεύγος, το θηλυκό που γεννήθηκε δύο μήνες πριν γεννάει το πρώτο ζεύγος, οπότε έχουμε πέντε ζεύγη κουνελιών.

Στο τέλος του n – οστού μήνα, το πλήθος των ζευγών των κουνελιών είναι ίσο με το πλήθος των νέων ζευγών (n – 2) προσθέτοντας το πλήθος ζευγών που υπήρχαν τον προηγούμενο μήνα (n – 1). Αυτός είναι ο n – οστός αριθμός Fibonacci.

Άρα, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.

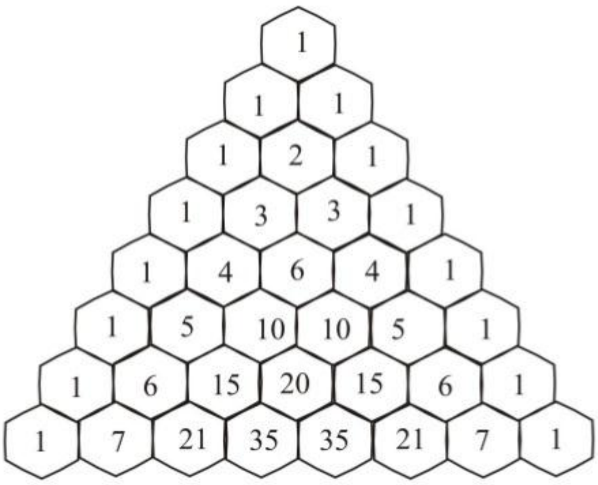
Ένα σχήμα που θα βοηθήσει να κατανοήσουμε καλύτερα τη λύση που δώσαμε είναι το παρακάτω, που μας δείχνει τι γίνεται μέχρι την αρχή του 5ου μήνα:



4. Σχέση της ακολουθίας Fibonacci με άλλες μαθηματικές έννοιες

Οι αριθμοί Fibonacci και το τρίγωνο του Pascal

Για να σχηματίσουμε το τρίγωνο του Pascal, ξεκινούμε τοποθετώντας μία μονάδα στο μέσο της $1^{ης}$ γραμμής, στη δεύτερη τοποθετούμε από μία μονάδα δεξιά και αριστερά της προηγούμενης και στις επόμενες γραμμές τοποθετούμε από μία μονάδα στα άκρα και υπολογίζουμε τους υπόλοιπους αριθμούς προσθέτοντας τους δύο αριθμούς της προηγούμενης γραμμής που βρίσκονται αριστερά και δεξιά του.
Σχηματικά έχουμε:

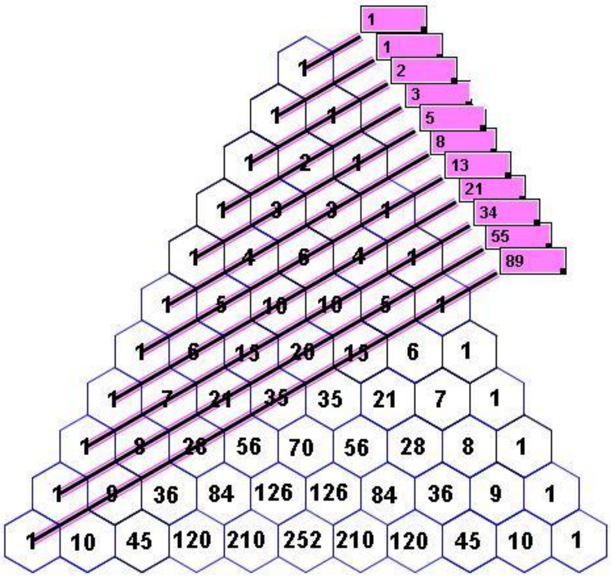


Έτσι, αν «σπρώξουμε» όλο το τρίγωνο προς τα αριστερά, θα πάρει την παρακάτω μορφή:

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

……………………………………..

και αθροίσουμε τις διαγώνιες όπως φαίνεται στο σχήμα

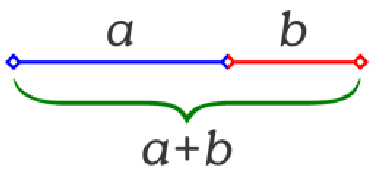


δημιουργείται η ακολουθία Fibonacci.

Σχέση ακολουθίας Fibonacci με τη χρυσή τομή και το χρυσό ορθογώνιο

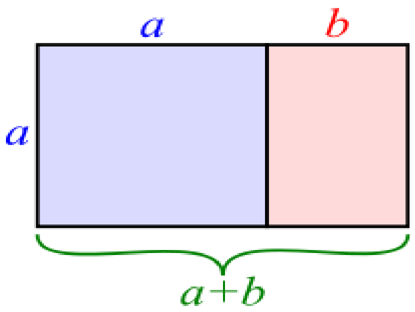
Στα Μαθηματικά και στην τέχνη, δύο ποσότητες έχουν αναλογία χρυσής τομής αν ο λόγος του αθροίσματός τους προς τη μεγαλύτερη ποσότητα είναι ίσος με το λόγο της μεγαλύτερης ποσότητας προς τη μικρότερη.

Δηλαδή: $\frac{\alpha + b}{\alpha} = \frac{\alpha}{b} = \varphi$

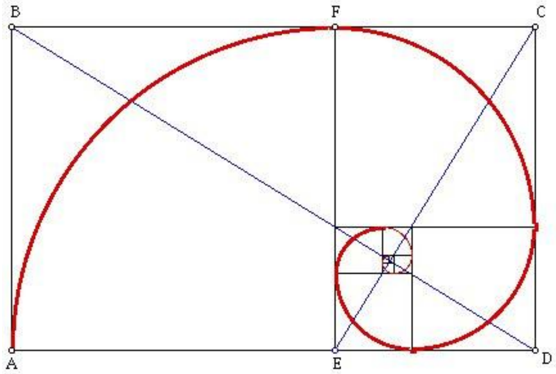


Το α + b είναι για το α ότι το α για το b.

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με αναλογίες χρυσής τομής με μεγαλύτερη την πλευρά α και μικρότερη την πλευρά b, όταν τοποθετείται δίπλα σε ένα τετράγωνο με πλευρές μήκους α, θα παραχθεί ένα όμοιο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με αναλογίες χρυσής τομής με μεγαλύτερη πλευρά την α + b και μικρότερη την α. Αυτό αναπαριστά η σχέση: $\frac{\alpha + b}{\alpha} = \frac{\alpha}{b} \equiv \varphi$.



Σχέση ακολουθίας Fibonacci και Χρυσής Τομής με τη Λογαριθμική Σπείρα



Η σημασία της Χρυσής Τομής δεν περιορίζεται στις καλές τέχνες. Οι πραγματικά ενδιαφέρουσες εφαρμογές ξεκινούν από την κατασκευή, με τη βοήθεια της Χρυσής Τομής, ενός άλλου γεωμετρικού σχήματος, που ονομάζεται Λογαριθμική Σπείρα. Η κατασκευή αυτή βασίζεται στην ακόλουθη ιδιότητα των «χρυσών» ορθογωνίων. Αν «κόψουμε» ένα τετράγωνο από ένα τέτοιο ορθογώνιο, τότε το μικρότερο ορθογώνιο που απομένει είναι πάλι «χρυσό»! Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακολουθία από ολοένα και μικρότερα «χρυσά» ορθογώνια, που βρίσκονται το ένα μέσα στο άλλο. Η λογαριθμική σπείρα είναι το σχήμα που σχηματίζεται σε αυτή την ακολουθία των «χρυσών» ορθογωνίων, αν εγγράψουμε σε κάθε τετράγωνο ένα τεταρτοκύκλιο.

5. Σχέση της ακολουθίας Fibonacci με άλλους επιστημονικούς τομείς

Βοτανολογία

Τα φυτά δε γνωρίζουν για την ακολουθία Fibonacci, απλά μεγαλώνουν με τον πιο πρόσφορο και αποδοτικό τρόπο. Όμως η ακολουθία κάνει την εμφάνισή της στη διάταξη των φύλων γύρω από το μίσχο. Τα διάφορα φυτά είναι έτσι κατασκευασμένα, ώστε, όταν τα κοιτούμε κατακόρυφα από πάνω τα φύλλα, τείνουν να μην επικαλύπτουν το ένα το άλλο, για να τα βλέπει όλα ο ήλιος κατά τη διάρκεια της ημέρας και να συγκρατούν ίδια ποσότητα νερού κατά τη διάρκεια μιας βροχής. Με λίγα λόγια αυτή η διάταξη είναι ζωτικής σημασίας για τα φύλλα των φυτών. Όμως αυτό που είναι αξιοπρόσεκτο είναι ότι, αν κάποιος ξεκινήσει να μετρά από την κορυφή με τη φορά των δεικτών του ρολογιού ή και αντίθετα τα τα φύλλα ενός φυτού, έτσι ώστε να σταματήσει, όταν ένα φύλλο επικαλύπτει κάποιο άλλο, κοιτώντας το φυτό πάντα κατακόρυφα, ο αρθμός των φύλλων που θα μετρά πάντα θα είναι ένας αριθμός Fibonacci.

Τους αριθμούς Fibonacci τους συναντάμε σε πολλά είδη λουλουδιών. Έτσι, στη φύση υπάρχουν λουλούδια με:

- 1 πέταλο: κρίνοι
- 2 πέταλα: euphorbia
- 3 πέταλα: lily, iris, trillium
- 5 πέταλα: buttercup, wild rose, larkspur, columbine (aquilegia)
- 8 πέταλα: delphinium
- 13 πέταλα: ragwort, corn marigold, cineraria
- 21 πέταλα: aster, black – eyed susan, chicory
- 34 πέταλα: plantain, pyrethrum
- 55, 89 πέταλα: michaelmas daisies, the asteraceae family

1 πέταλο

Κρίνος

2 πεταλα

Euphorbia

3 πέταλα

Lily

Iris

Trillium

<u>5 πέταλα</u>

Buttercup

Wild rose

Larkspur

Columbine (aquilegia)

<u>8 πέταλα</u>

Delphinium

13 πέταλα

Ragwort

Corn marigold

Cinenaria

21 πέταλα

Aster

Black – eyed susan

Chicory

<u>34 πέταλα</u>

Plantain

Pyrethrum

<u>55, 89 πέταλα</u>

Michaelmas daisies

The asteraceae family

Η ακολουθία Fibonacci εμφανίζεται επίσης στην ανάπτυξη των βελόνων αρκετών ειδών ελάτου, καθώς επίσης και στη διάταξη των πετάλων στα ηλιοτρόπια. Μερικά κωνοφόρα δέντρα παρουσιάζουν τη σειρά αριθμών στη δομή της επιφάνειας των κορμών τους, ενώ τα φοινικόδεντρα στους δακτυλίους των κορμών τους.

Βελόνες από έλατο

Ηλιοτρόπιο

Εκτός από τα λουλούδια και τα φυτά, τους αριθμούς Fibonacci, τους συναντάμε και στα λαχανικά που τρώμε.

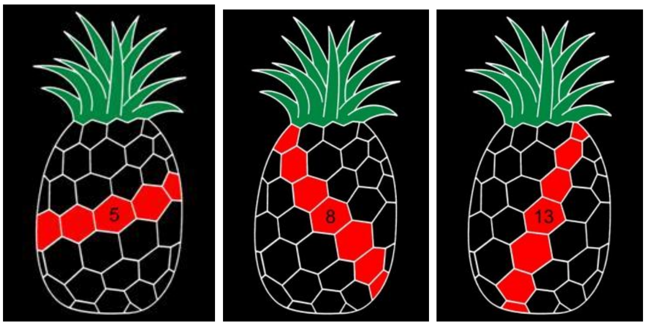
Ας παρατηρήσουμε ένα απλό κουνουπίδι. Αυτό που προσέχουμε είναι ότι περίγραμμα ενός κουνουπιδιού είναι σχεδόν πεντάγωνο. Κοιτώντας το καλύτερα βλέπουμε ένα κεντρικό σημείο, όπου τα άνθη του είναι μικρότερα. Με ένα πιο προσεκτικό βλέμμα φαίνεται, πως τα άνθη του σχηματίζουν σπείρες γύρω από το κεντρικό σημείο αυτό προς και τις δύο κατευθύνσεις.

Την ιδιαιτερότητα αυτή έχει και το μπρόκολο αλλά και οι σπόροι του κουκουναριού.

Μπρόκολο

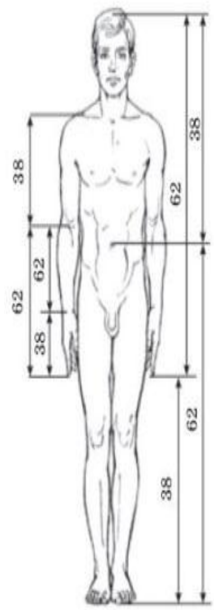
Κουκουνάρι

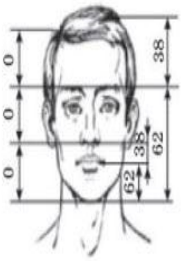
Τέλος, ένα φρούτο που περιέχει αριθμούς Fibonacci είναι ο ανανάς. Μετρώντας τα εξάγωνα των διαγωνίων που σχηματίζονται στη φλούδα του παρατηρούμε ότι είναι σε πλήθος ίσες με κάποιον αριθμό Fibonacci.

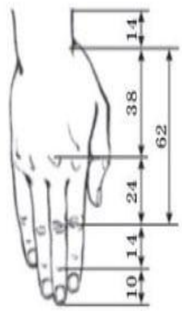


Ανανάς

Βιολογία







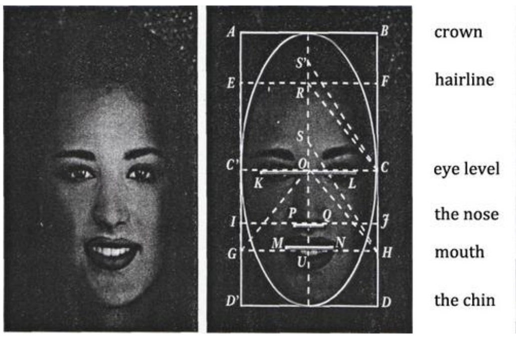
Εκτός από τα φυτά, τα λουλούδια και τα λαχανικά, αριθμοί Fibonacci υπάρχουν στο ανθρώπινο σώμα, στο γενεαλογικό δένδρο της αρσενικής μέλισσας, στα κέρατα του κριού, σε κελύφη σαλιγκαριών, σε όστρακα θαλάσσιων οργανισμών, όπως για παράδειγμα είναι ο ναυτίλος και άλλα.

Στο ανθρώπινο σώμα, σχεδόν όλα τα μέρη του, είναι κατασκευασμένα σύμφωνα με τη Χρυσή Αναλογία φ. Από το κεφάλι μέχρι και τις πατούσες εμφανίζεται ο αριθμός φ.

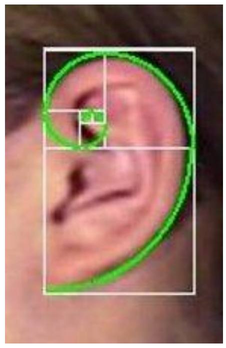
Το πρόσωπο

Το ανθρώπινο πρόσωπο εμφανίζει πολλές χρυσές αναλογίες. Το κεφάλι αποτελεί ένα χρυσό ορθογώνιο με την ευθεία που ορίζουν τα μάτια να το χωρίζει στη μέση. Το στόμα και η μύτη είναι το καθένα τοποθετημένο στη χρυσή τομή του ευθύγραμμου τμήματος που ορίζεται ανάμεσα στα μάτια και στην άκρη του πιγουνιού.

Εκτός όμως από τα χρυσά ευθύγραμμα τμήματα που δημιουργούνται, εμφανίζονται και πολλά χρυσά ορθογώνια. Επιπλέον, παρατηρώντας το ανθρώπινο αυτί, θα δούμε πως η σπείρα που δημιουργείται μας θυμίζει τη χρυσή σπείρα. Τέλος, αναφορικά με τις διαστάσεις των δοντιών, παρατηρείται ότι τα δύο μπροστινά δόντια είναι εγγεγραμμένα σε ένα χρυσό ορθογώνιο, με μία χρυσή αναλογία του ύψους προς το πλάτος τους. Επιπλέον, η αναλογία του πλάτους από το πρώτο δόντι προς το πλάτος του δεύτερου είναι επίσης χρυσή. Τέλος, αν χαμογελάσουμε, θα παρατηρήσουμε πως το πλάτος του χαμόγελου προς το πλάτος που υπάρχει μέχρι το τρίτο δόντι, είναι ίση με φ.



Ο αριθμός φ στο πρόσωπο



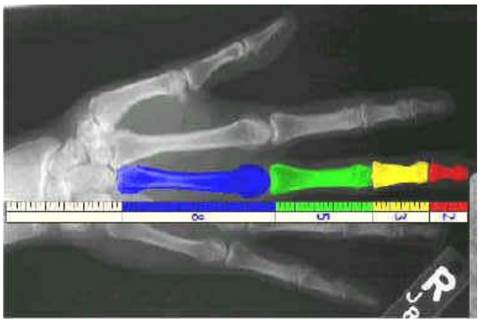
Η χρυσή σπείρα στο αυτί

Η Χρυσή Αναλογία φ στα δόντια

<u>Το σώμα</u>

Το ύψος ενός ανθρώπου προς την απόσταση από το κεφάλι μέχρι και την άκρη του μεσαίου δακτύλου του, αποτελεί ένα χρυσό ευθύγραμμο τμήμα. Η απόσταση από το κεφάλι μέχρι και την άκρη του μεσαίου δακτύλου προς την απόσταση από το κεφάλι μέχρι και τους αγκώνες, αποτελεί ένα χρυσό ευθύγραμμο τμήμα. Η απόσταση από το κεφάλι μέχρι και τους αγκώνες προς την απόσταση από το κεφάλι μέχρι και τους ώμους, αποτελεί επίσης ένα χρυσό ευθύγραμμο τμήμα. Η απόσταση από το κεφάλι μέχρι και τους ώμους προς την απόσταση από την κορυφή του κεφαλιού μέχρι την άκρη του πιγουνιού, αποτελεί εξίσου ένα χρυσό ευθύγραμμο τμήμα.

Τα χέρια

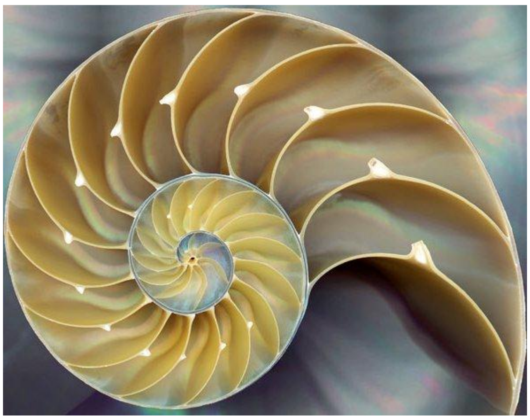


Ένας (1) άνθρωπος έχει δύο (2) χέρια που το καθένα έχει πέντε (5) δάκτυλα, που το καθένα είναι χωρισμένο σε τρία (3) μέρη και έχει δύο αρθρώσεις.

Παρατηρούμε ότι και στο ανθρώπινο χέρι εμφανίζονται οι αριθμοί της ακολουθίας Fibonacci.

Επιπλέον, αν μετρήσουμε τα τρία κόκαλα κάθε δακτύλου και πάρουμε το λόγο του μακρύτερου προς το μεσαίο ή του μεσαίου προς το μικρότερο κόκαλο, βρίσκουμε το λόγο της χρυσής τομής φ, που συνδέεται με τους αριθμούς Fibonacci.

Όστρακα (Ναυτίλος)

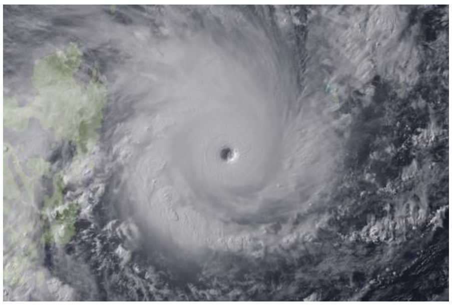


Ναυτίλος

Φυσικές Επιστήμες

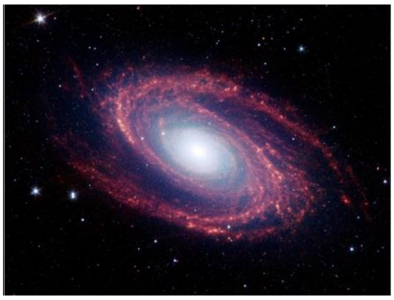
Οι αριθμοί Fibonacci και η χρυσή αναλογία φ, όμως, εμφανίζονται και σε πολλούς κλάδους των φυσικών επιστημών όπως στην ατομική σχάση, στην ηλεκτρονική ανάλυση δεικτών, στον προγραμματισμό των ηλεκτρονικών υπολογιστών, στις διακλαδώσεις των ποταμών, στα κύματα των ωκεανών, στους ανεμοστρόβιλους, στο ηλιακό σύστημα, στους γαλαξίες και άλλα.

Κύμα ωκεανού



Ανεμοστρόβιλος

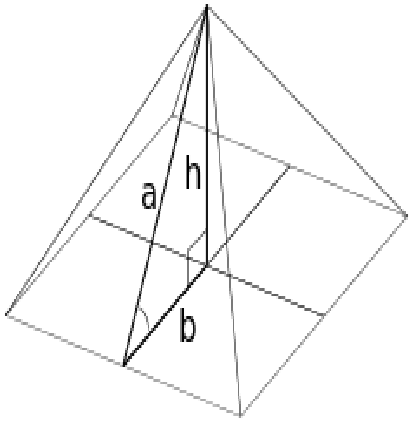
Γαλαξίες



Αρχιτεκτονική

Ένας άλλος τομέας στον οποίο εμφανίζονται οι αριθμοί Fibonacci είναι η αρχιτεκτονική. Εμφανίζονται στη μεγάλη Πυραμίδα του Χέοπα, στη Μινωική αρχιτεκτονική, στον Παρθενώνα, στο αρχαίο θέατρο της Επιδαύρου, στην Παναγία των Παρισίων, στο Ταζ Μαχαλ και αλλού.

Μεγάλη Πυραμίδα του Χέοπα



Εάν τμήσουμε κάθετα τη μεγάλη πυραμίδα του Χέοπα, θα πάρουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, το ονομαζόμενο Αιγυπτιακό Τρίγωνο. Ο λόγος της υποτείνουσας του τριγώνου που σχηματίζεται προς τη μισή πλευρά της βάσης (απόσταση της πλευράς από το κέντρο) είναι 1,61804… που διαφέρει από τον αριθμό φ στο πέμπτο δεκαδικό ψηφίο.

Μινωική αρχιτεκτονική

Στη Μινωική αρχιτεκτονική συναντώνται οι σπείρες σαν γεωμετρικά μοτίβα σε καθημερινά αντικείμενα, όπως αγγεία και κοσμήματα. Η Μινωική κεραμική βασιζόταν σε γεωμετρικά και γραμμικά μοτίβα (σπείρες, τρίγωνα, καμπύλες, ψαροκόκαλο).

Στην Κνωσό και στις Μυκήνες απαντώνται σπειροειδή μοτίβα που συμβολίζουν φυσικά φαινόμενα όπως τον κυκλώνα, σαν προσπάθεια του ανθρώπου να εξευμενίσει τα φυσικά στοιχεία.

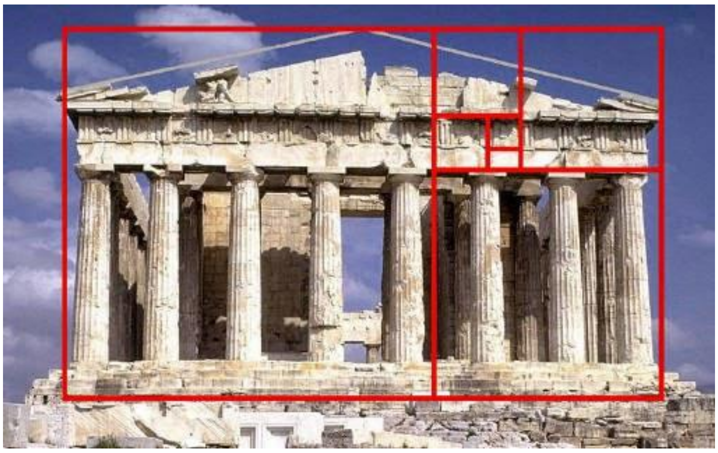
Την ιδιότητα της σπείρας να μη διακόπτεται εκμεταλλεύτηκε και ο δημιουργός του δίσκου της Φαιστού. Μια κυκλική πήλινη πλάκα στην οποία έχουν τυπωθεί συμβολογραφικά στοιχεία, που δεν έχουν αποκρυπτογραφηθεί ακόμα: πουλιά, ψάρια, έντομα, φυτικά μοτίβα, ζώα και άνθρωποι, σε μια σπείρα που δεν διακόπτεται. Έτσι το κείμενο παρουσιάζεται ενιαίο από την αρχή ως το τέλος του.

Μινωικό αγγείο

Δίσκος της Φαιστού

Παρθενώνας

Ο Παρθενώνας είναι χτισμένος με βάση τα χρυσά ορθογώνια και το φ. Επιπλέον ο ίδιος είναι ένα χρυσό ορθογώνιο.



Ο Παρθενώνας χωρισμένος με βάση τα χρυσά ορθογώνια

Αρχαίο Θέατρο της Επιδαύρου

Το θέατρο της Επιδαύρου έχει τέλεια ακουσική. Η ορχήστρα του είναι ένας τέλειος κύκλος, ενώ το κοίλον του αποτελεί τμήμα σφαίρας. Οι 34 σειρές καθισμάτων στο κάτω διάζωμα και οι 21 στο επάνω δίνουν τον αριθμό 55. Το άθροισμα των πρώτων 10 αριθμών (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) δίνει 55, το άθροισμα των πρώτων 6 (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) δίνει 21 και το άθροισμα των 4 τελευταίων (7 + 8 + 9 + 10) δίνει 34. Ο χρυσός αριθμός φ κάνει την εμφάνισή του μιας και η αναλογία σειρών των δύο διαζωμάτων 21/34 = 0,618… = 1/φ, αλλά και η αναλογία του κάτω διαζώματος προς το σύνολο των σειρών 34/55 = 0,618… = 1/φ.

Η Παναγία των Παρισίων

Ο αριθμός φ έχει βρεθεί και στο σχέδιο της Παναγίας των Παρισίων. Η δυτική πρόσοψη της εκκλησίας είναι η μεριά όπου η παρουσία των χρυσών ευθύγραμμων τμημάτων είναι ιδιαίτερα αισθητή.

Ταζ Μαχαλ

Ο αριθμος φ υπάρχει και στο Ταζ Μαχαλ, αφού μπορεί να χωριστεί σε χρυσά ορθογώνια.

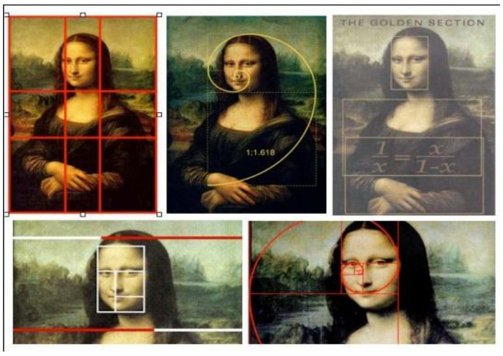
Τέχνη

Οι αριθμοί Fibonacci καθώς και η χρυσή αναλογία φ εντοπίζεται και σε πολλές τέχνες όπως είναι η ζωγραφική και η μουσική αλλά και στην κατασκευή μουσικών οργάνων.

Ζωγραφική

Η Mona Lisa

Ο Leonardo Da Vinci ζωγράφισε το πρόσωπο της Mona Lisa ώστε αυτό να χωράει τέλεια σε ένα χρυσό ορθογώνιο και δόμησε τον υπόλοιπο πίνακα γύρω από το πρόσωπο χωρίζοντάς τον επίσης σε χρυσά ορθογώνια.



Κατασκευή μουσικών οργάνων

Πιάνο

Το πιάνο έχει σχέση με την ακολουθία Fibonacci. Η οκτάβα του πληκτρολογίου αποτελείται από 13 πλήκτρα εκ των οποίων τα 8 είναι λευκά και τα άλλα 5 είναι μαύρα. Τα μαύρα πλήκτρα αποτελούνται από μία ομάδα των δύο πλήκτρων και άλλη μία των τριών. Οι αριθμοί 2, 3, 5, 8 και 13 τυχαίνει να είναι διαδοχικοί αριθμοί Fibonacci.

Βιολί

Ο Stradivarius, ως γνώστης των χρυσών ορθογωνίων και της χρυσής τομής τα χρησιμοποίησε για να τοποθετήσει τις f σχήματος τρύπες στο διάσημο βιολί του.

Επιπλέον, η μέθοδος κατασκευής βιολιών του Baginsky ήταν βασισμένη σε χρυσά ορθογώνια.

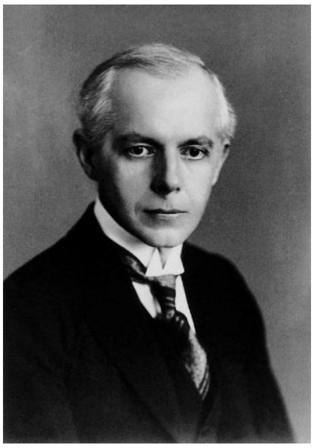
Μουσική

Ο Wolfgang Amadeus Mozart διαίρεσε μεγάλο αριθμό από τις σονάτες του σε δύο μέρη, η χρονική αναλογία των οποίων αντιστοιχεί στη χρυσή τομή, τον αριθμό φ, αν και υπάρχει σημαντική διχογνωμία για το κατά πόσο αυτό έγινε σκόπιμα.

Σύμφωνα με την αδερφή του, ο Mozart στα μαθητικά του χρόνια ασχολούνταν μόνο με αριθμούς. Επιπλέον, στα περιθώρια μερικών από τις συνθέσεις του σημείωνε μαθηματικές εξισώσεις. Μάλιστα, στη Fantasia και Fugue σε Ντο Ματζόρε, υπάρχουν στα περιθώρια οι υπολογισμοί της πιθανότητας μιας νίκης του σε μια λαχειοφόρο αγορά. Αν και αυτές οι εξισώσεις δεν αφορούσαν τη μουσική του, εν τούτοις προδίδουν μια έλξη και μια αγάπη που είχε στα μαθηματικά.

Άλλοι μουσικοί που εφάρμοσαν τον κανόνα της χρυσής αναλογίας στα έργα τους ήταν οι: Μπέλα Μπάρτοκ (1881 – 1945), Κλώντ Ντεμπισύ (1862 – 1918), Ερίκ Σατί (1866 – 1925), Σούμπερτ (1797 – 1828) και Μπαχ (1685 – 1750), ο οποίος μάλιστα συνήθιζε να κωδικοποιεί το όνομά του και να το εμφανίζει στις συνθέσεις του.

Φαντασία του Mozart

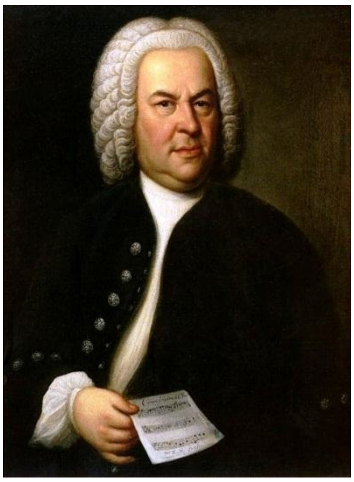


Μπέλα Μπάρτοκ

Κλώντ Ντεμπισύ

Ερίκ Σατί

Σούμπερτ



Μπαχ