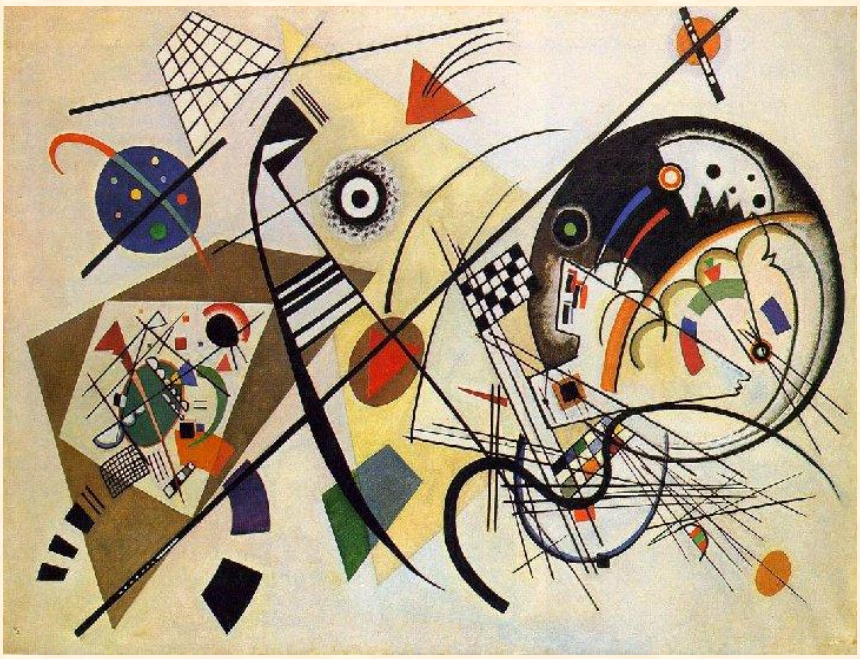
14ο Λύκειο Περιστερίου



Μαθηματικά Α΄ Λυκείου

Το βιβλίο αυτό δημιουργήθηκε για να χρησιμοποιηθεί
συμπληρωματικά στο σχολικό βιβλίο.

Α. Καραγιαννίδου
Σ. Μιχαήλογλου
Δ. Πατσιμάς

Οι πράξεις των πραγματικών αριθμών και οι ιδιότητες τους

Δυνάμεις

Ορισμός: $\sim^{\neg} Z \underbrace{\sim \check{e} \sim \check{e} \ldots \check{e} \sim}_{\neg \text{ παράγοντες}}$, $\neg [\mathbf{1}, \sim \check{C}\mathbb{R}$.

Ακόμη ορίζουμε ότι: $\sim^{\mathbf{1}} Z \sim$ και με $\sim \div \mathbf{0}$: $\sim^{\mathbf{0}} Z \mathbf{1}$ ©~§ $\sim^{J\neg} Z \frac{\mathbf{1}}{\sim^{\neg}}$.

Ιδιότητες

1. $\sim^{©} \check{e} \sim^{a} Z \sim^{©H a}$ **2.** $\sim^{©} \check{e}\ {}^{©} Z \text{Ε} \sim \check{e}\ \text{F}^{©}$

3. $\frac{\sim^{©}}{\sim^{a}} Z \sim^{©J a}$ **4.** $\frac{\sim^{©}}{{}^{©}} Z \hat{\text{H}} \sim \hat{\text{J}}^{©}$ $\hat{\text{h}}$ $\hat{\text{H}}$ $\hat{\text{J}}$ $\hat{\text{K}}$ **5.** $\text{Ε} \sim^{©} \text{F}^{a} Z \sim^{©\check{e} a}$

ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ (200 – 284 μ.Χ) («πατέρας της άλγεβρας») (Λατινική μετάφραση των *Αριθμητικών*, 1621)

Στο έργο του ***Αριθμητικά,*** υπάρχει συστηματική χρήση συντομεύσεων για τις δυνάμεις των αριθμών καθώς και για τις σχέσεις και πράξεις των αριθμών.

Ένας **άγνωστος αριθμός** συμβολίζεται από ένα σύμβολο που μοιάζει με το γράμμα **ς** (ίσως, προέκυψε από το τελευταίο γράμμα της λέξης αριθμός) , το **τετράγωνο** του συμβολίζεται $\mathbf{\Delta^{Y}}$, ο **κύβος** του ως $\mathbf{K^{Y}}$, η τέταρτη δύναμη (που ονομάζεται τετράγωνο-τετράγωνο) ως $\Delta^{Y}\Delta$, η πέμπτη δύναμη ή τετράγωνο-κύβος ως ΔK^{Y} και ή έκτη δύναμη ή κύβος-κύβος ως $K^{Y}K$.

Έτσι, το x^2 συμβολίζεται Δ^{Y}, το x^3 K^{Y}, το x^4 $\Delta^{Y}\Delta$, x^5 ΔK^{Y}, το x^6 $K^{Y}K$ κοκ.

Χρησιμοποιεί επίσης όρους και **σύμβολα για τους αντίστροφους των διάφορων δυνάμεων**, δηλαδή για τους 1/x, $1/x^2$…, όπως για παράδειγμα επειδή γ = 3, το γ΄= 1/3, και επειδή ια = 11, το ια΄= 1/11 κλπ (δηλαδή το αντίστοιχο αριθμητικό σύμβολο με ένα τόνο), ο Διόφαντος χρησιμοποιεί ένα σημάδι δίπλα από τα σύμβολα για τους x^2, x^3, …προκειμένου να συμβολίσει τους αντίστροφους τους. Η πρόσθεση όρων γίνεται απλά με την παράθεση των συμβόλων των όρων, ενώ για την αφαίρεση τοποθετεί ένα γράμμα, μπροστά από τους προς αφαίρεση όρους. Με αυτού του είδους τον συμβολισμό, ο Διόφαντος είναι σε θέση να γράψει πολυώνυμα σχεδόν όσο σύντομα τα γράφουμε κι εμείς σήμερα.

Το πολυώνυμο $2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6$ για παράδειγμα γράφεται κάπως έτσι ΔΔ2Κ3χ5ΜΔ4μ6 όπου τα γράμματα Δ, Κ, χ, Μ και μ έχουν τη θέση του «τετράγωνο», «κύβος», «άγνωστος», «μείον» και της «μονάδας» αντίστοιχα, και τα σημερινά ψηφία αντικατέστησαν τα ελληνικά αλφαβητικά σύμβολα που χρησιμοποιούνταν την εποχή του Διόφαντου.

Γνωρίζετε με ποιά ελληνικά γράμματα συμβόλιζαν τους αριθμούς;

……

Να γράψετε με τον συμβολισμό του Διόφαντου το πολυώνυμο

$3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - x + 2$ ……..

ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Newton, Isaac, 1643 – 1727) ***Arithmetica Universalis,*** translated by D. T. Whiteside, Cambridge University Press, 1972. :

Απόσπασμα:

Εάν μία ποσότητα πολλαπλασιάζεται με τον εαυτό της, για συντομία ο αριθμός των παραγόντων συνήθως προσαρτάται. Έτσι, στη θέση του aaa γράφουμε a^3, στη θέση του aaaa γράφουμε a^4, στη θέση του aaaaa γράφουμε a^5και στη θέση του aaabb γράφουμε a^3bb ή a^3b^2. Εάν ας πούμε, το a είναι 5 και το b είναι 2, τότε το a^3 είναι 5×5×5 ή 125, το a^4, θα είναι 5×5×5×5 ή 625, και το a^3b^2 θα είναι 5×5×5×2×2 ή 500. Εδώ σημειώστε ότι ένας αριθμός γραμμένος αμέσως μεταξύ δύο μεταβλητών σχετίζεται πάντα με αυτή που προηγείται. Έτσι το «3» στη ποσότητα a^3b^2 δεν σημαίνει ότι το b^2 πρέπει να παρθεί 3 φορές, αλλά δηλώνει ότι το a πρέπει να πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του δύο φορές. Παρατηρείστε επίσης ότι αυτές οι ποσότητες λέγεται ότι είναι τόσων **διαστάσεων,** δυνάμεων όσων περιλαμβάνουν παραγόντων ή ποσοτήτων που πολλαπλασιάζει η μία την άλλη, και ότι ο αριθμός που προσαρτάται ονομάζεται ο δείκτης της δύναμης ή διάσταση τους. Έτσι το **a^2 είναι δύο διαστάσεων ή δυνάμεων**, ενώ το a^3 καθώς ο προσαρτημένος αριθμός «3» δείχνει, είναι τριών. Επίσης ο a^2 αποκαλείται το τετράγωνο, ο a^3 ο κύβος, ο a^4 το τετράγωνο-τετράγωνο (τέταρτη δύναμη), ο a^5 το τετράγωνο-κύβος (πέμπτη δύναμη), ο a^6 ως ο κύβος-κύβος (έκτη δύναμη), ο a^7 ως τετράγωνο-τετράγωνο-κύβος (έβδομη δύναμη) και ούτω καθεξής.

Ασκήσεις

1. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $\left(x^2\right)^3 \cdot 5x^4$ **β)** $x^{-2} \cdot x^4$ **γ)** $\left[\left(x^{-3}\right)^{-2}\right]^{-5}$ **δ)** $\left(2x^2\right)^3 : \left(x^{-2}\right)^{-2}$

ε) $\left(xy^3\right)^2 \cdot x^3 y$ **στ)** $\left(-2x\right)^2 \cdot \left(-2x^2\right)$ **ζ)** $\left(-x\right)^3 \cdot \left(-x\right)^4 \cdot x^5$

η) $\dfrac{6x^3 \cdot y^6}{2x^4 \cdot y^2}$ **θ)** $\dfrac{x^{-2} \cdot x^4}{\left(x^3\right)^3 \cdot x^7}$ **ι)** $\dfrac{4\alpha^2 \cdot \beta^8}{x^{-3} \cdot y^5} : \dfrac{2\alpha^4 \cdot \beta^6}{x^{-5} \cdot y^2}$

κ) $2\alpha^2 \cdot \beta^4 \left(\dfrac{\alpha^{-2} \cdot \beta^{-1}}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\dfrac{\alpha^3 \cdot \beta^2}{2}\right)^2$ **λ)** $\dfrac{3^{100} \cdot \alpha^8 \cdot \beta^4}{9^{49} \cdot \left(\alpha^3 \beta\right)^2} : \dfrac{81^{20} \cdot \left(\alpha^{-2}\right)^4 \cdot \left(\beta^{-2}\right)^8}{\left(3^{-2}\right)^{-39} \cdot \alpha^{-6} \cdot \beta^{-14}}$

2. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις ως μία δύναμη:

$A = 3^{77} + 3^{77} + 3^{77}$ $B = 2^{102} - 2^{101} - 2^{100}$

$\Gamma = 2^{59} - 4^{29}$ $\Delta = 2^{17} \cdot 3^{18} - 2^{18} \cdot 3^{17}$

3. Αν οι αριθμοί α,β είναι αντίστροφοι, να αποδείξετε ότι:

$$\left[\left(\alpha^{-7}\beta^3\right) : \left(\alpha\beta\right)^4\right] \cdot \frac{\left(\alpha\beta\right)^{-2}}{\left(\alpha^{18}\right)^0 \left(\beta^{-2}\alpha\right)^{-1} \beta^7} = 1$$

4. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=\dfrac{\alpha^{-12}\beta^4\left(\alpha^2\beta^{-5}\right)^3}{a^{-5}\left(\alpha^{-3}\beta^5\right)^{-2}}\cdot\left[\dfrac{(\alpha\beta)^2}{\alpha^2\beta^4}\right]^3$ για

$\alpha=1821$ και $\beta=\dfrac{1}{1821}$

5. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi=\dfrac{25^5\cdot15^{10}\cdot12^{15}\cdot14^{20}}{6^{25}\cdot32^5\cdot35^{20}}$.

Ταυτότητες

1. Ε~Η Φ² Ζ~²Η **2**~ Η ²	**2.** Ε~J Φ² Ζ~²J **2**~ Η ²
3. Ε~Η Φ³ Ζ~³Η **3**~² Η **3**~ ²Η ³	**4.** Ε~J Φ³ Ζ~³J **3**~² Η **3**~ ²J ³
5. ~² J ² ΖΕ~Η ΦΕ~J Φ	
6. ~³J ³ ΖΕ~J ΦΕ~²Η~ Η ²Φ	7. ~³Η ³ ΖΕ~Η ΦΕ~²J~ Η ²Φ
8. Ε~Η Η¥Φ² Ζ~²Η ²Η¥²Η **2**~ Η **2**~¥Η **2** ¥	

6. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(2\alpha+5)^2$ **β)** $\left(x^6-2x^3\right)^2$ **γ)** $(-3x+y)^2$ δ) $(-5\alpha-6\beta)^2$

ε) $(2\alpha-3\beta)(2\alpha+3\beta)$ **στ)** $(x+5)(5-x)$ **ζ)** $(-x+2y)(x+2y)$

η) $(2x+5y)^3$ **θ)** $\left(x^2-2\right)^3$ **ι)** $\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$

κ) $(2\alpha-1)\left(4\alpha^2+2\alpha+1\right)$ **λ)** $4(x-3)^2-(2x-3)^2$

μ) $(\alpha-2)^3-2(3\alpha+1)^3-\alpha(\alpha+3)(3-\alpha)$

7. Με τη βοήθεια των ταυτοτήτων να βρείτε τις παρακάτω τιμές:

α) 504^2-502^2 **β)** 10^6-999^2 **γ)** $997\cdot1003$ **δ)** $88^2+2\cdot88\cdot12+12^2$

ε) $999^2+2\cdot999+1$ **στ)** 101^2 **ζ)** 99^2

8. α) Να αποδείξετε ότι $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=4$

β) Να υπολογίσετε τη παράσταση $\Pi=\left(1821+\dfrac{1}{1821}\right)^2-\left(1821-\dfrac{1}{1821}\right)^2$.

9. Αν $x+\dfrac{1}{x}=6$, να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων:

α) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ **β)** $x^3+\dfrac{1}{x^3}$

10. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=(3x-1)^2+(4x-3)^2-(5x-3)^2$ είναι σταθερό.

Παραγοντοποίηση

Η διαδικασία με την οποία μία παράσταση, που είναι άθροισμα μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων, λέγεται παραγοντοποίηση.

α) Κοινός παράγοντας

Αν όλοι οι όροι μιας παράστασης έχουν κοινό παράγοντα, τότε η παράσταση μετατρέπεται σε γινόμενο με τη χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας.

π.χ: $\alpha x-\alpha y+\alpha z = \alpha(x-y+z)$

β) Ομαδοποίηση

Στην παράσταση $\alpha x+\alpha y+\beta x+\beta y$ δεν υπάρχει κοινός παράγοντας σε όλους τους όρους. Όμως αν από τους δύο πρώτους όρους βγάλουμε κοινό παράγοντα το α και από τους δύο τελευταίους το β η παράσταση γίνεται:

$\alpha(x+y)+\beta(x+y)$ και έτσι σχηματίζονται δύο καινούργιοι όροι με κοινό παράγοντα το $x+y$. Οπότε:

$$\alpha x+\alpha y+\beta x+\beta y=\alpha(x+y)+\beta(x+y)=(x+y)(\alpha+\beta)$$

γ) Διαφορά τετραγώνων: $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$

π.χ: $x^2-4=x^2-2^2=(x-2)(x+2)$

δ) Διαφορά - Άθροισμα κύβων

$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$ και $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

π.χ: $x^3-8=x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+4)$, $x^3+8=x^3+2^3=(x+2)(x^2-2x+4)$

ε) Ανάπτυγμα τετραγώνου

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \text{ και } (\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$$

π.χ: $x^2+2x+1=x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2=(x+1)^2$, $x^2-4x+4=x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2=(x-2)^2$

στ) Παραγοντοποίηση τριωνύμου

$(x+\alpha)(x+\beta)=x^2+\beta x+\alpha x+\alpha\beta=x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

π.χ: $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$ με $\alpha+\beta=5$ και $\alpha\cdot\beta=6$

11. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $2\alpha\beta-2\alpha\gamma$ **β)** $9x^2-3x$ **γ)** $x(x+3)+7(x+3)$

δ) $\alpha^2(x-1)+\beta(1-x)$ **ε)** $\alpha(x-y)-(y-x)$

στ) $(2x-3)(x-5)-(x+2)(x-5)$ **ζ)** $9-x^2$ **η)** $36\beta^2-9\gamma^2$

θ) x^6-y^4 **ι)** $\alpha^4-\beta^4$ **κ)** $3x^3-3x$ **λ)** $(\alpha-2\beta)^2-4\beta^2$

μ) $(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2$ **ν)** x^5-16x **ξ)** x^3-8 **ο)** $8x^3+27$

12. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις

α) $\alpha x+\alpha y+\beta x+\beta y$ **β)** $x^2-y+xy-x$ **γ)** $\alpha^2-2\alpha+1$

δ) $4x^2-4x+1$ **ε)** $9y^2+12y+4$ **στ)** x^3-6x^2+9x

ζ) x^2-7x+6 **η)** x^2-6x+5 **θ)** x^2+4x+3

13. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $\dfrac{\alpha^3-2\alpha^2+\alpha}{\alpha^3-\alpha}$ **β)** $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4}$

γ) $\dfrac{\alpha^2+3\alpha}{2\alpha^2+3\alpha}\cdot\dfrac{4\alpha^2-9}{4\alpha^2-12\alpha+9}$ **δ)** $\dfrac{\alpha^2-4}{\alpha^3+8}:\dfrac{\alpha-2}{\alpha^2-2\alpha+4}$

14. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $\dfrac{\alpha^3-2\alpha^2+\alpha}{\alpha^3-\alpha}$ **β)** $\dfrac{\alpha^2+3\alpha}{2\alpha^2+3\alpha}\cdot\dfrac{4\alpha^2-9}{4\alpha^2-12\alpha+9}$

γ) $\dfrac{4x^2+4x+1}{6x^2-3x}:\dfrac{12x^2-3}{2x}$ **δ)** $(x+y)^2\cdot\left(x^{-1}+y^{-1}\right)^{-2}$

15. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, δ με $\beta\neq 0$ και $\delta\neq\gamma$ ώστε να ισχύουν:

$\dfrac{\alpha+\beta}{\beta}=4$ και $\dfrac{\gamma}{\delta-\gamma}=\dfrac{1}{4}$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=3\beta$ και $\delta=5\gamma$.

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Pi=\dfrac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}$

16. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α,β,γ για τους οποίους ισχύει ότι:

$\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\beta}{3}=\dfrac{\gamma}{4}$ και $3\alpha+2\beta-\gamma=16$.

17. Αν $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}$, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2}{\beta^2\delta+\beta\delta^2}=\left(\dfrac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)^3$.

Διάταξη πραγματικών αριθμών

Ορισμός: Ένας αριθμός α λέμε ότι είναι μεγαλύτερος από έναν αριθμό β, και γράφουμε ~ [, όταν η διαφορά ~ J είναι θετικός αριθμός.
Δηλαδή ~ [ę ~ J [0.

Ιδιότητες

- $\sim^2 \tilde{n}\ \mathbf{0}$ **για κάθε** $\sim \check{C}\mathbb{R}$ (η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\sim Z\ \mathbf{0}$)
  - $\sim^2 H\ ^2 Z\ \mathbf{0}$ ę $\sim Z\ \mathbf{0}$ ©~§ $Z\ \mathbf{0}$
  - $\sim^2 H\ ^2 [\ \mathbf{0}$ ę $\sim \div \mathbf{0}$ **ή** $\div \mathbf{0}$
- $\text{Ε}\sim [\ \mathbf{0}$ ©~§ $[\ \mathbf{0}$ F Ĝ $\sim H\ [\ \mathbf{0}$ — Το άθροισμα δύο θετικών αριθμών είναι θετικός αριθμός
- $\text{Ε}\sim Y\ \mathbf{0}$ ©~§ $Y\ \mathbf{0}$ F Ĝ $\sim H\ Y\ \mathbf{0}$ — Το άθροισμα δύο αρνητικών αριθμών είναι αρνητικός αριθμός
- $\sim,\ -$«**ó**±¦«-§ ę $\sim \check{e}\ [\ \mathbf{0}$ ę $\tilde{—}\ [\ \mathbf{0}$
- $\sim,\ £^2£^\circ$**ó**±¦«-§ ę $\sim \check{e}\ Y\ \mathbf{0}$ ę $\tilde{—}\ Y\ \mathbf{0}$
- $\text{Ε}\sim [$ ©~§ $[\ ¥$ F Ĝ $\sim [\ ¥$
- $\sim [$ ę $\sim H\ ¥\ [\ H\ ¥$
- **Αν** $¥\ [\ \mathbf{0}$**, τότε:** $\sim [$ ę $\sim \check{e}\ ¥\ [\ \check{e}\ ¥$
- **Αν** $¥\ Y\ \mathbf{0}$**, τότε:** $\sim [$ ę $\sim \check{e}\ ¥\ Y\ \check{e}\ ¥$
- $\text{Ε}\sim [$ ©~§ $¥\ [$ ¢F ę $\sim H\ ¥\ [\ H$ ¢
- **Αν** $\sim,\ ,¥,¢\ [\ \mathbf{0}$**, τότε:** $\text{Ε}\sim [$ ©~§ $¥\ [$ ¢F ę $\sim \check{e}\ ¥\ [\ \check{e}$ ¢
- **Αν α,β θετικοί αριθμοί και ν θετικός ακέραιος, τότε:** $\sim [$ ę $\sim \neg\ [\ \neg$**.**
- **Αν α,β θετικοί αριθμοί και ν θετικός ακέραιος, τότε:** $\sim Z$ ę $\sim \neg\ Z\ \neg$**.**

18. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2+4\geq 4\alpha$ **β)** $x^2+16\geq 8x$ **γ)** $(\alpha+\beta)^2+4\alpha\beta\geq -8\beta^2$

δ) $\alpha^2+2\alpha+3>0$ **ε)** $3x^2+4x+4>0$ **στ)** $\alpha^2+\beta^2-4\alpha+2\beta+5\geq 0$

ζ) $\alpha^2-4\alpha+5>0$ **η)** $2\alpha^2-4\alpha+4>0$ **θ)** $\alpha^2+\beta^2-2\alpha-2\beta+2\geq 0$

19.α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:
$(x-1)^2+(y+3)^2=x^2+y^2-2x+6y+10$

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2+y^2-2x+6y+10=0$

20. Να αποδειχθούν οι παρακάτω προτάσεις:

α) $2x^2-4x+5>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) $x^2+y^2\geq 12x+4y-40$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$

γ) $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\geq\frac{1}{4}(\alpha+\beta)^2$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

δ) $\alpha^2+\beta^2+25\geq 6\alpha+8\beta$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

21. Να αποδείξετε ότι: $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)\geq(\alpha x+\beta y)^2$.

22. Αν $x > 2$, να αποδείξετε ότι: $3x + 2 > x + 6$.

23. Αν $x > 1$, να αποδείξετε ότι: $5x + 2 > 2x + 5$.

24.α) Αν α,β ομόσημοι να αποδείξετε ότι: $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$.

β) Αν α,β,γ ομόσημοι, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha\beta(\alpha+\beta) + \beta\gamma(\beta+\gamma) + \gamma\alpha(\gamma+\alpha) \geq 6\alpha\beta\gamma$$

25. Αν $\alpha \geq 1$, να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 - 1 \geq \alpha - \alpha^2$.

26. Αν $\alpha > 1$ και $\beta > 1$ να δείξετε ότι $\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta} < 1$.

27. Αν $\alpha + \beta > 0$ τότε $\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta} \geq \frac{\alpha+\beta}{2}$.

28. Αν $\alpha \geq \beta$ να δείξετε ότι $\alpha^3 - \beta^3 \geq \alpha\beta^2 - \beta\alpha^2$.

29. Αν $0 < \alpha < 1$,τότε

α) να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 < \alpha$.

β) να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0,\ \alpha^3,\ 1,\ \alpha,\ \frac{1}{\alpha}.$$

30. Αν $0 < \alpha < \beta$,τότε:

α) Να διατάξετε από τον μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς 1, $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\beta}{\alpha}$.

β) Να αποδείξετε ότι πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών ο $\frac{\alpha}{\beta}$ βρίσκεται πλησιέστερα στο 1 από ότι ο $\frac{\beta}{\alpha}$.

31. Αν $6 < x < 8$ και $2 < y < 3$, να αποδείξετε ότι:

α) $8 < x + y < 11$ **β)** $3 < x - y < 6$ **γ)** $18 < 2x + 3y < 25$ **δ)** $1 < \frac{x-2}{y+1} < 2$

32. Αν $\alpha > \beta > 0$, να συγκρίνετε τους αριθμούς: $A = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$ και $B = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$.

33. Αν $\alpha > \beta > 0$, να συγκρίνετε τους αριθμούς: $A = (\alpha-\beta)^3$ και $B = \alpha^3 - \beta^3$.

34. Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $A=\alpha^2+\beta^2+13$ και $B=4\alpha+6\beta$.

35. Αν $x,y>0$ και $\nu\in\mathbb{N}^*$ τότε $\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\nu}+\left(1+\frac{y}{x}\right)^{\nu}\geq 2^{\nu+1}$.

36. Αν α, β, γ είναι πλευρές τριγώνου τότε και οι $\sqrt{\alpha},\sqrt{\beta},\sqrt{\gamma}$ είναι πλευρές τριγώνου.

37. Να δείξετε ότι $(\alpha+\beta+\gamma)^2\geq 3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$ για κάθε $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

38. Αν $\alpha<\beta<\gamma$ και κ, λ, μ θετικοί να αποδείξετε ότι $\alpha<\frac{\kappa\alpha+\lambda\beta+\mu\gamma}{\kappa+\lambda+\mu}<\gamma$.

39. Αν $x^2+y^2=2$ και $\alpha^2+\beta^2=4$, να αποδείξετε ότι $xy+\alpha\beta\geq -3$.

Τράπεζα θεμάτων

40. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4\leq x\leq 7$ και $2\leq y\leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

41. Για τους πραγματικούς αριθμούς α , β ισχύουν: $2\leq\alpha\leq 4$ και $-4\leq\beta\leq -3$. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha-2\beta$ **β)** $\alpha^2-2\alpha\beta$

42. Δίνονται οι παραστάσεις: $K=2\alpha^2+\beta^2+9$ και $\Lambda=2\alpha(3-\beta)$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $K-\Lambda=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)+(\alpha^2-6\alpha+9)$

β) Να δείξετε ότι: $K\geq\Lambda$, για κάθε τιμή των α, β .

γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K=\Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

43. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha>0$ και $\beta>0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha+\frac{4}{\alpha}\geq 4$ **β)** $\left(\alpha+\frac{4}{\alpha}\right)\cdot\left(\beta+\frac{4}{\beta}\right)\geq 16$

Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Κι αφού οι έμποροι απ' τα πλοία βγάζουν πλούτη
δίκιο θα 'χω να αρχίσω απ' τη συντεχνία ετούτη.
Τα πλοία στη θάλασσα με πανιά και με κουπιά,
τα βρήκαν και τα έφτιαξαν γεωμετρικά μυαλά.
Αβάκια κι άγκυρες, τροχαλίες και πυξίδες,
τις βρήκε η τέχνη η γεωμετρική κι εκείνες.
Κι αν πεις για τα βαρούλκα και τ' άλλα μέρη,
κι αυτά η γεωμετρία τα 'χει καταφέρει.
Μαραγκοί, χαράκτες, ξυλουργοί κι οικοδόμοι,
ζωγράφοι, γλύπτες κι άλλοι πολλοί ακόμη,
Κεντήστρες, χρυσοχόοι, αν έχουνε μυαλό,
στη γεωμετρία το χρωστάν το χάρισμα αυτό.
Το κάρο και τ' αλέτρι που τραβάν ίσες γραμμές
η γεωμετρία τα φκιάνει, αλλά και οι δουλειές
των παπουτσήδων των ραφτών με φιοριτούρες διάφορες
δεν πιάνουν φράγκο αν δεν έχουνε αναλογίες άψογες.
Κι οι υφάντρες με γεωμετρία κάνουνε το δικό τους,
της φαντασίας άβακα έχουν τον αργαλειό τους.
Ο τροχός που γυρνά, η πέτρα που λιανίζει,
ο μύλος που με το νερό και τους μοχλούς γυρίζει,
Είναι δουλειές της γεωμετρίας παράξενες και θαυμαστές
κι αν δεν της είχαμε, μόνοι μας δεν θα τις βρίσκαμε ποτές.
Κι όλα όσα γίνονται με μέτρα και σταθμά,
χωρίς απόδειξη γεωμετρική, ποιος θα τα πάρει σοβαρά;
Και τα ρολόγια πού γιναν τις ώρες για να λένε,
την πιο μεγάλη εφεύρεση που έγινε ποτέ,
τώρα που τα 'χουν όλοι κανείς δεν τα προσέχει,
την τέχνη που 'χουν μέσα τους κανείς δεν την αμείβει
Μα αν ήταν να 'ναι σπάνια κι έφτιαχνε κάποιος ένα
με γεωμετρία άψογη, θα το μάθαιναν όλοι
πως απ' τις τέχνες όλες πιο χρήσιμη είναι μία,
και το όνομα αυτής, Γεωμετρία.

Ρόμπερτ Ρέκορντ, ***Ο δρόμος για τη γνώση,*** **1551**

Ορισμός

Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με $|\sim|$ και ορίζεται από τον τύπο: $|\sim| Z \begin{cases} \sim & \sim \tilde{n} \mathbf{0} \\ J\sim & \sim Y \mathbf{0} \end{cases}$.

Συνέπειες του ορισμού

1. $|Jx| Z |x|$

2. $|x| Z \mathbf{0}$ ę $x Z \mathbf{0}$

3. $|x| H |y| Z \mathbf{0}$ ę $x Z y Z \mathbf{0}$

4. $|x|^{2\neg} Z x^{2\neg}, \neg \check{C} \mathbb{N}^{G}$.

5. $|x|Z|y|$ ę **x Z y** ή **x Z Jy** **6.** $|x|$ ñ **x και** $|x|$ ñ **Jx για κάθε** $x\check{C}\mathbb{R}$

7. $J|x|$ á **x** á $|x|$ **για κάθε** $x\check{C}\mathbb{R}$

Απόσταση δύο αριθμών

Αν θεωρήσουμε δύο αριθμούς α,β που παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία Α και Β αντίστοιχα, τότε το μήκος του τμήματος ΑΒ λέγεται απόσταση των αριθμών α και β και ισχύει: $dΕ\sim, FZ|\sim J|$

Είναι προφανές ότι d(α,β) = d(β,α)

44.Να απλοποιηθεί η παράσταση : $A=\dfrac{|2x-1|}{|1-2x|}-3\dfrac{|3y+2|}{|-2-3y|}+2\dfrac{|x-y-z|}{|y-x+z|}$

45.Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτη τιμή

$A=|x-2|+3x-5$ $B=|x-3|+2x-1$

$\Gamma=|x-3|-2|x+1|+x$ $\Delta=|2x+2|-3|-x+3|+3x-1$

46.Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτη τιμή:

$A=2|x-1|-3+x$ $B=|x-3|+3|x+1|-1$

$\Gamma=|2x+2|-3|-x+3|+2|x+4|$ $\Delta=|x^2-2x+1|$

47.Αν $x\le 1$, να γράψετε χωρίς τις απόλυτες τιμές, την παράσταση:

$A=|x-3|-2|x-1|+|2-x|$

48.Αν $x<2$, να γράψετε χωρίς τις απόλυτες τιμές, την παράσταση:

$A=|x-2|-2|3-x|+|x-4|$

49.Αν $-1<x<2$ να απλοποιηθεί η παράσταση $A=|x-2|+|x+1|+|3-x|$.

50.Δίνεται η παράσταση: $A=|x-1|+|y-3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει:

$1<x<4$ και $2<y<3$.Να αποδείξετε ότι:

α) $A=x-y+2$ **β)** $0<A<4$.

51.Αν $x\in[1,2)$, να αποδείξετε ότι: $3<|x|-|x-1|+2|3-x|\le 5$.

52.Αν $\alpha<\beta<\gamma<0$, να αποδείξετε ότι:

α) $|\alpha-\beta|+|\beta-\gamma|-|\gamma-\alpha|=0$ **β)** $|\alpha+\beta|-|\beta+\gamma|-|\alpha+\gamma|=2\gamma$

53.Αν $\alpha<1<\beta$ να αποδείξετε ότι:

α) $|1-\alpha|+|1-\beta|=|\alpha-\beta|$ **β)** $|\alpha-2|+|\beta|-|\alpha-\beta|=2$

54.Αν $\alpha<x<\beta$ να δείξετε ότι $\big||\alpha-x|+|\beta-x|\big|=\beta-\alpha$.

55.Αν $x\neq y$, να αποδείξετε ότι $|x-y|+\dfrac{1}{|x-y|}\geq 2$.

56.Να αποδείξετε ότι: **α)** $\left|\dfrac{x}{1+x^2}\right|\leq\dfrac{1}{2}$ **β)** $x^2+y^2\geq 2|xy|$

57. Αν $|x|\leq 4$ και $|y|\leq 1$ να δείξετε ότι $|x+y|\leq 5$ και $|3y-x-2|\leq 9$.

58. Αν $|x|=2$, $|y|=3$, $|z|=5$ να δείξετε ότι $|x-y+z|\leq 10$.

59.Αν $|x-\alpha|<k$ και $|x-\beta|<m$ να δείξετε ότι $|\alpha-\beta|<k+m$.

Τράπεζα θεμάτων

60.α) Αν $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}-\{0\}$, να αποδειχθεί ότι: $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|\geq 2$ (1)

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

61.Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x-2|<3$

α) Να αποδείξετε ότι: $-1<x<5$.

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K=\dfrac{|x+1|+|x-5|}{3}$

62.Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y, για τους οποίους ισχύει: $|y-2|<1$

α) Να αποδείξετε ότι: $y\in(1,3)$.

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K=\dfrac{|y-1|+|y-3|}{2}$

63.Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x,3)=3-2x$

α) Να αποδείξετε ότι $x\leq\dfrac{3}{2}$.

β) Αν $x\leq\dfrac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K=|2x-3|-2|3-x|$ είναι ανεξάρτητη του x.

64. Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x,5) \le 9$.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά.

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x.

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β).

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι: $|x+4|+|x-14|=18$.

65. Δίνονται τα σημεία Α , Β και Μ που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2, 7 και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων:

i) $|x+2|$ **ii)** $|x-7|$

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος: $|x+2|+|x-7|$.

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=|x+2|+|x-7|$ γεωμετρικά.

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

66. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x-1|<1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0<x<1$.

β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: $1,\ x,\ x^2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

67. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση $(\alpha-1)(1-\beta)>0$

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α, β.

β) Αν επιπλέον $|\beta-\alpha|=4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$K=|\alpha-1|+|1-\beta|$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε γεωμετρικά είτε αλγεβρικά.

68. Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $|\alpha-2|<1$ και $|\beta-3|\le 2$

α) Να αποδειχθεί ότι $1<\alpha<3$.

β) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β .

γ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha-3\beta$.

δ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$.

Ρίζες πραγματικών αριθμών

Ορισμός

Αν $\alpha \geq 0$, τότε **τετραγωνική ρίζα** $\sqrt{\alpha}$, ονομάζουμε τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = \alpha$.

Δηλαδή τετραγωνική ρίζα του αριθμού $\alpha \geq 0$ λέγεται ο αριθμός $\beta \geq 0$ που αν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον α.

Ιδιότητες τετραγωνικής ρίζας

1. $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$

2. $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 = \alpha$, $\alpha \geq 0$

3. $\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta \geq 0$

4. $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$, $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$

Ορισμός

Αν $\alpha \geq 0$, τότε **ν-οστή ρίζα** $\sqrt[\nu]{\alpha}$, ονομάζουμε τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^\nu = \alpha$.

Δηλαδή ν-οστή ρίζα του αριθμού $\alpha \geq 0$ λέγεται ο αριθμός $\mathbf{x \geq 0}$ που αν υψωθεί στη ν-οστή μας δίνει τον α.

Ιδιότητες ν-οστής ρίζας

1. $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = |\alpha|$

2. **Αν** $\alpha \geq 0$ **τότε**

$\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu = \alpha$ **και** $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha$, **ενώ αν** $\alpha < 0$, **τότε** $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = |\alpha| = -\alpha$

3. $\sqrt[\nu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta \geq 0$

4. $\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}$, $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$

5. $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\mu$, $\alpha \geq 0$

6. $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha\sqrt[\nu]{\alpha}$, $\alpha, \beta \geq 0$

7. $\sqrt[\kappa]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\kappa\nu]{\alpha}$, $\alpha \geq 0$

8. $\sqrt[\kappa\lambda]{\alpha^{\kappa\mu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$

69. Να γραφούν οι παρακάτω παραστάσεις σε μορφή κλάσματος με ρητό παρονομαστή: **i)** $3^{\frac{-1}{2}}$ **ii)** $5^{\frac{-3}{2}}$ **iii)** $2^{\frac{-4}{3}}$

70. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται οι παρακάτω παραστάσεις:

α) $\sqrt{x-1}$ **β)** $\sqrt{x^2+2}+3\sqrt{|x|-3}$ **γ)** $\sqrt{2-|x-1|}$

δ) $\sqrt{x^2-2x+1}$ **ε)** $\dfrac{3x}{\sqrt{|x|-x}}$ **στ)** $\dfrac{\sqrt{3-|x|}}{x}$

ζ) $\sqrt{x-3}$ **η)** $\sqrt{x^2+1}-4x\sqrt{|x|-2}$ **θ)** $\sqrt{3-|x+2|}$

ι) $\sqrt{x^2+4x+4}$ **κ)** $\dfrac{4x+5}{\sqrt{|x|+x}}$ **λ)** $\dfrac{\sqrt{4-|x|}}{x-1}$

71.Να βρείτε για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα: $\sqrt{4x^2-1}=\sqrt{2x-1}\sqrt{2x+1}$

72.Να αποδείξετε ότι: $\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}=2$.

73.Αν $2<x<3$ να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:
$A=\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{9-6x+x^2}$.

74.Να αποδείξετε ότι:

α) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{\sqrt{7}-2}\cdot\sqrt{\sqrt{7}+2}=3$ **β)** $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{13}-3}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{13}+3}=2$

75.Να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\dfrac{5}{2}$ **β)** $\dfrac{1}{\left(5-\sqrt{23}\right)^2}-\dfrac{1}{\left(5+\sqrt{23}\right)^2}=5\sqrt{23}$

76.Να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{\sqrt{75}+\sqrt{147}}{\sqrt{192}-\sqrt{108}}=6$ **β)** $\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{250}=6\sqrt[3]{2}$

77.Να απλοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις:

$A=\dfrac{\sqrt{20}-2\sqrt{8}+3\sqrt{12}}{\sqrt{45}-2\sqrt{18}+3\sqrt{27}}$ $B=\sqrt[3]{8}-2\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{27}$

$\Gamma=\sqrt[3]{16}-3\sqrt[3]{54}$ $\Delta=\sqrt[3]{8}-\sqrt[4]{81}+\sqrt[5]{32}$

78.α) Να βρεθούν τα x για τα οποία ορίζεται η παράσταση $K=\sqrt[3]{\dfrac{1}{x-1}\sqrt{x^2+4}}$.

β) Αν $x=2$ να υπολογιστεί η τιμή του K καθώς και η τιμή της παράστασης

$\Pi=\dfrac{K^2}{\sqrt[3]{2}}+\dfrac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt{2}+1}$.

79.Να αποδείξετε ότι:

α) $\sqrt[6]{3^5}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}=3\sqrt[3]{9}$ **β)** $\sqrt[4]{2^5}\cdot\sqrt[12]{2^9}=4$ **γ)** $\dfrac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[6]{x^5}}=\sqrt[4]{x^3}$

δ) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[4]{8}=2\sqrt[12]{2^{11}}$ **ε)** $\sqrt[5]{9}\cdot\sqrt[3]{3}=27\sqrt[3]{9}$ **στ)** $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}=\sqrt[12]{x^5},\ x>0$

80. Να αποδείξετε ότι: **α)** $\sqrt[6]{3\sqrt[3]{9\sqrt{3^5}}}=\sqrt[12]{3^5}$ **β)** $\sqrt[10]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[6]{2}$

81. Να απλοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις:

$A=\sqrt{x^4+2x^2+1}$ $B=\sqrt{x+y+2\sqrt{xy}}\ ,\ x,y>0$ $\Gamma=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

82. Να απλοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις:

$A=\sqrt{x^2-6x+9}$ $B=\sqrt{7+2\sqrt{10}}$ $\Gamma=\sqrt{8-2\sqrt{15}}$

83. Να αποδείξετε ότι η τετραγωνική ρίζα του αριθμού $43-24\sqrt{3}$ είναι ο αριθμός $3\sqrt{3}-4$ και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τη παράσταση

$A=\sqrt{43+24\sqrt{3}}+\sqrt{43-24\sqrt{3}}$.

84. Να τραπούν τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

α) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **β)** $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ **γ)** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}$

δ) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ **ε)** $\dfrac{4}{\sqrt[4]{8}}$ **στ)** $\dfrac{1}{\sqrt[7]{2^3}}$

85. Να τραπούν τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.

α) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ **β)** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+1}$ **γ)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$

86. Να μετατραπούν τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

$\dfrac{3}{\sqrt[7]{\alpha^2}}$ $\dfrac{2}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{7}}$ $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

87. Να δείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}-1$ είναι η κυβική ρίζα του αριθμού $5\sqrt{2}-7$.

88. Αν $A=\sqrt{7-4\sqrt{3}}-\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ να υπολογίσετε το A^2 και το Α.

89. Να αποδείξετε ότι:

α) $\sqrt[5]{5}<\sqrt[3]{3}$ **β)** $\sqrt{7}+\sqrt{3}<\sqrt{21}+1$ **γ)** $\sqrt{8-2\sqrt{10}}>\sqrt{5}-\sqrt{2}$

90. Να αποδείξετε ότι:

α) $\sqrt[6]{6} < \sqrt[5]{5}$ **β)** $\sqrt{6}+\sqrt{5} < \sqrt{30}+1$ **γ)** $\sqrt{12+2\sqrt{30}} > \sqrt{6}+\sqrt{5}$

91.Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt{7}-\sqrt{2}$ και $\sqrt{8}-\sqrt{3}$.

92.Να συγκρίνεται τους αριθμούς:

α) $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[4]{4}$ **β)** $\sqrt[4]{10-\sqrt{15}}$ και $\sqrt{\dfrac{\sqrt{30}-\sqrt{2}}{2}}$

Τράπεζα θεμάτων

93.Δίνεται η παράσταση: $A=\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}\right)$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

94.α) Να δείξετε ότι : $3<\sqrt[3]{30}<4$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$, $6-\sqrt[3]{30}$

95.Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x-4}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β) Για $x=4$,να αποδείξετε ότι: $A^2-A=2\cdot(10-\sqrt{5})$.

96.Δίνεται η παράσταση: $B=\sqrt[5]{(x-2)^5}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β) Για $x=4$,να αποδείξετε ότι: $B^2+6B=B^4$

97.Δίνονται οι αριθμοί: $A=(\sqrt{2})^6$ και $B=(\sqrt[3]{2})^6$

α) Να δείξετε ότι: $A-B=4$

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\sqrt{2},1,\sqrt[3]{2}$

98.Δίνεται η παράσταση: $K=\dfrac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}-\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$

α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x, ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

β) Αν $-2<x<3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

99. Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις: $A=\left(\sqrt{2}\right)^6$, $B=\left(\sqrt[3]{3}\right)^6$ και $\Gamma=\left(\sqrt[6]{6}\right)^6$

α) Να δείξετε ότι: $A+B+\Gamma=23$

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$. Να αιτιολογήσετε την απάντηση.

100. Αν είναι $A=\sqrt[3]{5}, B=\sqrt{3}$ και $\Gamma=\sqrt[6]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A\cdot B\cdot\Gamma=\sqrt{15}$ **β)** Να συγκρίνετε τους αριθμούς Α, Β.

101. Αν είναι $A=2-\sqrt{3}$, $B=2+\sqrt{3}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A\cdot B=1$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi=A^2+B^2$.

Εξισώσεις 1ου Βαθμού

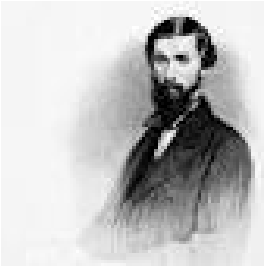
Γραμμικές εξισώσεις με έναν άγνωστο
Ιστορική αναδρομή

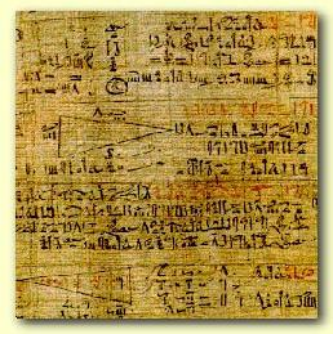
Αιγυπτιακή μέθοδος της Λαθεμένης Θέσης

Χρησιμοποιήθηκε από τους αρχαίους Αιγύπτιους και Βαβυλώνιους (2000 π.Χ. – 1000 π.Χ.) και στην Ευρώπη στις αρχές του 14ου αι. στα ιταλικά «σχολεία του άβακα» και εμφανίζεται στα αμερικάνικα σχολικά εγχειρίδια έως και το 1780. Στα «σχολεία του άβακα» δίδασκαν μαθηματικά στους γιους Ιταλών εμπόρων και αυτά ήταν που εισήγαγαν στο κοινό το Ινδο-Αραβικό αριθμητικό σύστημα και τους αλγορίθμους για την χρήση του. Η αιγυπτιακή μέθοδος περιγράφεται στον πάπυρο Rhind και στον πάπυρο της Μόσχας. Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι μάντευαν ένα βολικό αλλά συχνά λαθεμένο αριθμό και μετά τον προσάρμοζαν στο σωστό αποτέλεσμα.

Παράδειγμα:

Μία ποσότητα και ένα τέταρτο αυτής αν προστεθούν κάνουν 15. Ποια είναι η ποσότητα; (Πρόβλημα #26, Πάπυρος Rhind).





Ονομάστηκε έτσι από τον **Henry Rhind**, ο οποίος τον βρήκε, το 1858 (σήμερα φυλάσσεται στο Βρετανικό Μουσείο). Ο Rhind ήταν δικηγόρος από τη Σκωτία και βρέθηκε στην Αίγυπτο λόγω αναπνευστικών προβλημάτων. Αγόρασε τον πάπυρο αυτό, μαζί με έναν άλλον πάπυρο (γνωστό σήμερα ως «Δερμάτινος κύλινδρος»), στην αγορά του Λούξορ. Οι διαστάσεις του παπύρου είναι 33 εκ. πλάτος και 5 μ. μήκος. και είναι γραμμένος στην ιερατική γραφή. Περιέχει 83 μαθηματικά προβλήματα Μερικά είναι απλοί υπολογισμοί, όπως

πρόσθεση κλασμάτων ή διαίρεση αριθμών. Άλλα αφορούν υπολογισμούς εμβαδών, όγκων ή είναι οικονομικά προβλήματα καθημερινών εφαρμογών στην Αίγυπτο. Εντυπωσιακή είναι η προσέγγιση του π = 3,1605.
Ο Πάπυρος Rhind αντιγράφηκε από έναν αντιγραφέα χειρογράφων, τον A'hmose, για τον οποίον δεν γνωρίζουμε τίποτα, ούτε καν πότε έζησε. Υπολογίζεται ότι τον αντέγραψε το 1650 π.Χ.. Δεδομένου ότι ο A'hmose λέει ότι τα προβλήματα είναι 200 ετών, θα πρέπει να χρονολογούνται από το 1850 π.Χ. Ο Πάπυρος Rhind ήταν πιθανόν ένα είδος εγχειριδίου για να μάθει ο αιγύπτιος μαθητής απλά μαθηματικά. Κάποια προβλήματα είχαν στόχο να βελτιώσουν τις υπολογιστικές τους ικανότητες, άλλα εφάρμοζαν αυτές τις ικανότητες στη γεωργία, την οικοδομική κατασκευή και στα οικονομικά.

Τα **προβλήματα** που ακολουθούν είναι από αυτόν τον Πάπυρο:

1. ***Μία ποσότητα και ένα έβδομο της αν προστεθούν μαζί κάνουν 19. Ποια είναι η ποσότητα; ((Πρόβλημα #24)***
2. ***Μία ποσότητα και το μισό της αν προστεθούν κάνουν 16. Ποια είναι η ποσότητα; (Πρόβλημα #25)***
3. ***Μία ποσότητα και δύο τρίτα της ποσότητας προστίθενται και από το άθροισμα αφαιρείται το ένα τρίτο και απομένει 10.Ποια είναι η ποσότητα; (Πρόβλημα #28)***

Μπορείτε να τα λύσετε με σύγχρονο συμβολισμό;

Αυτό είναι ένα **Βαβυλωνιακό** πρόβλημα:

4. ***Βρήκα μία πέτρα, αλλά δεν την ζύγισα. Αφού πρόσθεσα ένα έβδομο και ένα ενδέκατο του συνολικού βάρους ζύγιζε 60. Ποιο ήταν το αρχικό της βάρος;***
   Μπορείτε να το λύσετε με σύγχρονο συμβολισμό;

Ο Διόφαντος από την Αλεξάνδρεια που έζησε περίπου το 250 μ.Χ. εισήγαγε συμβολικές συντομεύσεις για ορισμένους όρους των εξισώσεων. Το μόνο που είναι γνωστό για την ζωή του Διόφαντου είναι ότι είναι γραμμένο στον τάφο του:

5. ***Αυτός ο τάφος έχει τον Διόφαντο... Ο Θεός του παραχώρησε να είναι παιδί για το ένα έκτο της ζωής του και νέος για το ένα δωδέκατο και ακόμα ένα έβδομο ως εργένης. Πέντε χρόνια μετά το γάμο του γεννήθηκε ένας γιος που πέθανε τέσσερα χρόνια πριν τον πατέρα του έχοντας ζήσει τα μισά χρόνια από τον πατέρας του.***
   Μπορείτε να βρείτε πόσα χρόνια έζησε ο Διόφαντος;

¨Ένας άλλος πολιτισμός που αποκαλύπτεται από ένα βιβλίο μαθηματικών προβλημάτων είναι ο **πολιτισμός** της **Αρμενίας** του **7^{ου} αι μ.Χ**. Το βιβλίο, *Προβλήματα και Λύσεις του Vardapet Anania του Shirak*, είναι μία συλλογή 24 προβλημάτων.
Ακολουθούν δύο προβλήματα από αυτό το βιβλίο:

6. ***Κατά τη διάρκεια της διάσημης εξέγερσης των Αρμενίων εναντίον των Περσών, όταν ο Zaurak Kamsarakan σκότωσε τον Saurem, ένας από τους Αρμένιους αξιωματικούς έστειλε έναν απεσταλμένο στον Πέρση βασιλιά για να***

ανακοινώσει τα οδυνηρά νέα. Ο απεσταλμένος ταξίδευε 50 μίλια σε μια μέρα. Δεκαπέντε μέρες αργότερα, όταν το έμαθε αυτό ο Zaurak έστειλε καβαλάρηδες να καταδιώξουν και να φέρουν πίσω τον απεσταλμένο. Οι καβαλάρηδες κάλυψαν 80 μίλια σε μια μέρα. Βρείτε πόσες μέρες χρειάστηκαν για να πιάσουν τον απεσταλμένο.

7. ***Ο πατέρας μου μού είπε την παρακάτω ιστορία: κατά τη διάρκεια των διάσημων πολέμων μεταξύ των Αρμενίων και των Περσών, ο πρίγκιπας Zaurak Kamsarakan έκανε αξιοθαύμαστες ηρωικές πράξεις. Επιτέθηκε στα περσικά στρατεύματα τρεις φορές σε ένα μόνο μήνα. Την πρώτη φορά κατέρριψε το μισό περσικό στρατό, τη δεύτερη φορά, καταδιώκοντας τους Πέρσες, έσφαξε το ένα τέταρτο του αρχικού πληθυσμού των στρατιωτών. Τη τρίτη φορά κατέστρεψε το ένα ενδέκατο του αρχικού περσικού στρατού. Οι Πέρσες που ήταν ακόμα ζωντανοί, ήταν διακόσιοι ογδόντα, τράπηκαν σε φυγή προς την Nakhichevan. Από αυτό το υπόλοιπο, να βρείτε πόσοι Πέρσες στρατιώτες υπήρχαν πριν τη σφαγή.***

   Μπορείτε να τα λύσετε με σύγχρονο συμβολισμό;

Ισλαμική Μέθοδος του Al-jabr και Al-muqabala

Ο συνήθης μας τρόπος επίλυσης γραμμικών εξισώσεων χρονολογείται από την εποχή της εργασίας του Abu-Abdullah Mohammed ibn Musa Al-Khwarizmi (Mohammed, πατέρας του Abdullah, γιος του Moses, από το Khwarezm). Ο Al-Khwarizmi χρησιμοποίησε τις τεχνικές al-jabr και al-muqabala για να ανάγει γραμμικές εξισώσεις στη στάνταρτ μορφή την οποία ονόμαζε «ρίζες ίσες με αριθμούς». Ο άγνωστος ονομαζόταν «ρίζα». Ο Al-Khwarizmi έδωσε ως παράδειγμα αυτής της στάνταρτ μορφής το πρόβλημα «τέσσερις ρίζες είναι ίσες με είκοσι». Μετά συμπέρανε ότι η ρίζα είναι 5. Δεν χρησιμοποιούσε σύμβολα αλλά τα έγραφε όλα με λόγια.

Ας προσπαθήσουμε να λύσουμε ένα άλλο διάσημο πρόβλημα. Αυτό περιγράφεται σε ένα θρύλο σχετικό με την διαθήκη του Al-Khwarizmi την οποία έγραψε λίγο πριν το θάνατό του και ενώ η γυναίκα του ήταν έγκυος.

8. Σύμφωνα με τη διαθήκη αν η γυναίκα έκανε γιο, ο γιος έπρεπε να κληρονομήσει τα 2/3 της περιουσίας και η γυναίκα το 1/3. Αν έκανε κόρη, τότε η γυναίκα θα κληρονομούσε τα 2/3 και η κόρη το 1/3. Μετά το θάνατό του η γυναίκα του έκανε δίδυμα, ένα αγόρι κι ένα κορίτσι. Πώς θα έπρεπε να μοιραστεί η περιουσία προκειμένου να τηρηθεί η θέληση του Al-Khwarizmi;

Ο Leonhard Euler για την επίλυση προβλημάτων.

Ο Leonhard Euler, ο πλέον παραγωγικός μαθηματικός του 18^{ου} αι. έγραψε ένα εγχειρίδιο άλγεβρας το 1770. Στο τμήμα που αφορά στη επίλυση εξισώσεων ο Euler έδωσε μία προσεκτική περιγραφή του πώς να λύνουμε προβλήματα μετατρέποντάς τα σε εξισώσεις. Γράφει:

> *Στην Άλγεβρα, όταν έχουμε ένα ερώτημα να επιλύσουμε, αναπαριστούμε τον αριθμό που αναζητούμε με ένα από τα τελευταία γράμματα του αλφαβήτου, και μετά βρίσκουμε με ποιο τρόπο οι δοθείσες συνθήκες μπορούν να σχηματίσουν μία ισότητα μεταξύ δύο ποσοτήτων. Αυτή η ισότητα αναπαριστάται με ένα είδος τύπο που καλείται εξίσωση, η οποία μας επιτρέπει να καθορίσουμε τελικά την*

τιμή του αριθμού που αναζητούμε και κατά συνέπεια να επιλύσουμε το ερώτημα.

Προβλήματα για το σπίτι

Τα προβλήματα 9,10,11 και 12 που ακολουθούν είναι από τον πάπυρο του Rhind:

9. Μία ποσότητα και το ένα τρίτο της αν προστεθούν κάνουν 21.Ποια είναι η ποσότητα; (Πρόβλημα #27)

10. Αν σε μία ποσότητα προσθέσουμε το 1/5 της κάνει 21. Ποια είναι η ποσότητα;

11. Μία ποσότητα, το ένα τρίτο της και το ένα τέταρτο της αν προστεθούν δίνουν 2. Ποιά είναι η ποσότητα; (Πρόβλημα #32)

12. Πόσα βόδια είναι στο κοπάδι, όταν τα 2/3 του 1/3 αυτών κάνουν 70;

13. Το ακόλουθο πρόβλημα είναι από το βιβλίο *Liber Abaci* (*Το Βιβλίο του Υπολογισμού*) γραμμένο το 1202 από τον Leonardo της Pisa, ο οποίος έγινε αργότερα γνωστός ως **Fibonacci.**

Γιος ενός Ιταλού εμπόρου της Πίζα, μορφώθηκε στην Αφρική και έμαθε μαθηματικά από Ισλαμιστές δασκάλους. Καθώς ταξίδευε για δουλειές με τον πατέρα του συναντήθηκε με Ισλαμιστές λόγιους και έμαθε τη μαθηματική γνώση του Ισλαμικού κόσμου. Όταν επέστρεψε από τα ταξίδια του, αφιέρωσε τα επόμενα 25 χρόνια γράφοντας βιβλία και χρησιμοποιώντας ό,τι είχε μάθει.
Ένας μανάβης αγόρασε ένα συγκεκριμένο ποσό μήλων και πλήρωσε ένα δηνάριο για κάθε 7 μήλα. Την επόμενη μέρα πούλησε όλα τα μήλα 1 δηνάριο για κάθε 5 μήλα. Το καθαρό του κέρδος ήταν 12 δηνάρια. Πόσα μήλα αγόρασε; Πόσα δηνάρια έδωσε αρχικά;

14. Το ακόλουθο πρόβλημα είναι από το βιβλίο *Lilavati* του Ινδού μαθηματικού Bhaskara (1150 μ.Χ.). Από ένα σωρό λουλουδιών λωτών, το ένα τρίτο, το ένα πέμπτο και το ένα έκτο προσφέρθηκαν αντίστοιχα στους θεούς Siva, Vishnu και Sun, και το ένα τέταρτο στον Bhavami. Οι υπόλοιποι έξι λωτοί δόθηκαν στον αξιότιμο δάσκαλο. Πες γρήγορα όλο τον αριθμό των λωτών.

Η εξίσωση ~ğxH Z0

õ Αν $\alpha \neq 0$, τότε: $\alpha x = -\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha x}{\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{\alpha}$.

Δηλαδή αν $\alpha \neq 0$ η εξίσωση έχει **μοναδική λύση** την $x = -\frac{\beta}{\alpha}$.

õ Αν $\alpha = 0$, τότε η εξίσωση $\alpha x = -\beta$ γίνεται $0 \cdot x = -\beta$ και είναι φανερό ότι για να τη λύσουμε πρέπει να γνωρίζουμε τις τιμές του β, γιατί:

- αν $\beta \neq 0$ η εξίσωση είναι **αδύνατη**, ενώ
- αν $\beta = 0$ η εξίσωση έχει τη μορφή $0 \cdot x = 0$ και αληθεύει για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού x, δηλαδή είναι **ταυτότητα**.

102. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2(x+1) - x(x+1)^2 = 0$ **β)** $(x^2-1)^2 - x^2(x^2-2x+1) = 0$

γ) $(x-1)^2 + x^2 - 1 = 0$ **δ)** $(x+1)^2 + 2(x+1)(x-1) + (x-1)^2 = 0$

103. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ **β)** $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ **γ)** $2x^3 - 2x = x^2 - 1$

104. Να λυθεί η εξίσωση : $64x^3 + 27(2-x)^3 = (x+6)^3$.

105. Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ, να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(\lambda - 1)x = \lambda^2 - 1$ **β)** $\lambda x + 3\lambda = 2x + \lambda^2$

106. Να επιλυθεί η εξίσωση : $\frac{2x+1}{x-\lambda} = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

107. Να λυθούν οι εξισώσεις για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$:

α) $3x + \lambda x = 5(x - \lambda^2) + 6\lambda^2 - 4$ **β)** $\frac{x-2}{\lambda-2} + \frac{x+2}{\lambda+2} = 1$

108. Για τις διάφορες τιμές των πραγματικών αριθμών λ, μ, να λύσετε την εξίσωση: $\lambda x - 2\mu = x + 4$.

109. Δίνεται η εξίσωση $(\alpha + 3)x = 2\beta - 4$.

α) Για ποιες τιμές των α,β η εξίσωση έχει μοναδική λύση;
β) Για ποιες τιμές των α,β η εξίσωση είναι αδύνατη;
γ) Για ποιες τιμές των α,β η εξίσωση είναι ταυτότητα;

110. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $|x+3|=2$ **β)** $|x-4|=0$ **γ)** $|x-6|=-3$

δ) $|x-1|=3$ **ε)** $|x+3|=0$ **στ)** $|x+4|=-2$

111. Να λύσετε τις εξισώσεις: **α)** $||x-1|-2|=3$ **β)** $||2x-3|+1|=4$

112. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $|3x-4|=2|x+3|$ **β)** $|2x-3|=|x+6|$ **γ)** $|2x-10|=\sqrt{x^2-4x+4}$

113. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|x-2|+4}{3}-\frac{|x-2|+3}{5}=\frac{4}{3}$.

114. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3|x-1|=2x-1$ **β)** $|3x-2|=x+1$

115. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $|x-2|=2x-3$ **β)** $1-\frac{|2x-1|-1}{4}=|1-2x|-\frac{|6x-3|-2}{8}$

γ) $|2x-3|=|x+6|$ **δ)** $|3-|x+2||=1$

ε) $||x-3|+2|=2||x-3|-4|$

116. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $|x+1||x-5|=2|x+1|$ **β)** $2|x-3|-|x^2-9|=0$

117. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3|x-1|-|x+2|=x+3$ **β)** $|2-x|+2|x+3|=4$

118. Δίνονται οι παραστάσεις: $A=|2x-4|$ και $B=|x-3|$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Για κάθε $2\le x<3$ να αποδείξετε ότι $A+B=x-1$.

β) Υπάρχει $x\in[2,3)$ ώστε να ισχύει $A+B=2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή

119. Για τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ που ισχύει η σχέση $\alpha^2+\beta^2+25-8\alpha-6\beta=0$,να λυθεί η εξίσωση $\lambda^2x=\beta^2x+\lambda^2-\alpha\lambda+\beta$.

Τράπεζα θεμάτων

120. Δίνεται η εξίσωση $\lambda\cdot x=x+\lambda^2-1$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$(\lambda-1)x=(\lambda-1)(\lambda+1)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε.

γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

121. Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha+3)x=\alpha^2-9$, με παράμετρο $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) όταν $\alpha=1$ **ii)** όταν $\alpha=-3$

β) Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή.

Η εξίσωση x^ν Z α

Αν ν άρτιος και $\alpha<0$, τότε η εξίσωση $x^\nu=\alpha$ είναι αδύνατη

Αν ν άρτιος και $\alpha\geq 0$ τότε: $x^\nu=\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x=+\sqrt[\nu]{\alpha} \\ x=-\sqrt[\nu]{\alpha} \end{cases}$

Αν ν περιττός και $\alpha\geq 0$ τότε: $x^\nu=\alpha\Leftrightarrow x=\sqrt[\nu]{\alpha}$

Αν ν περιττός και $\alpha<0$ τότε: $x^\nu=\alpha\Leftrightarrow x=-\sqrt[\nu]{|\alpha|}$

122. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^2-25=0$ **β)** $x^4-625=0$

γ) $x^{2016}-1=0$ **δ)** $x^4+81=0$

123. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^3-27=0$ **β)** $x^5+243=0$ **γ)** $x^{1821}-1=0$

124. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^7-2x^3=0$ **β)** $x^5-9x^3=0$

γ) $x^8+125x^5=0$ **δ)** $x^{12}-x^9=0$

125. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $(x+1)^4-81=0$ **β)** $(x-2)^8+128=0$ **γ)** $(2x-1)^5+243=0$

δ) $(3x+2)^7-128=0$ **ε)** $81(x+2)^7-(x+2)^4=0$ **στ)** $16(x+4)^4-81=0$

Εξισώσεις 2ου βαθμού

Ιστορικά προβλήματα

Mohammed ibn Musa **al-Khwarizmi** 790-850 μ.Χ, Βαγδάτη (σημερινό Ιράκ). Στο βιβλίο του Hisab al-jabr w'al-muqabala (825 μ.Χ) έγραψε στην εισαγωγή ότι γράφτηκε για να δείξει αυτό που είναι «ευκολότατο και πιο χρήσιμο στην αριθμητική, τέτοια που οι άνθρωποι συνεχώς χρειάζονται σε περιπτώσεις κληρονομιάς, κληροδοτημάτων, χωρισμών, αγωγών και εμπορίου και σε όλες τις μεταξύ τους συναλλαγές, ή όπου η μέτρηση της γης, το σκάψιμο καναλιών, γεωμετρικοί υπολογισμοί και άλλα αντικείμενα διαφόρων ειδών εμπλέκονται». Με άλλα λόγια ο al-Khwarizmi ισχυριζόταν ότι έγραφε ένα πρακτικό εγχειρίδιο όχι ένα θεωρητικό. Ας δούμε μερικά από τα προβλήματα του:

1. Διαίρεσα το δέκα σε δύο μέρη. Πολλαπλασίασα το ένα από τα δύο μέρη με το άλλο. Μετά πολλαπλασίασα το ένα από τα δύο με τον εαυτό του και το γινόμενο του πολλαπλασιασμού με τον εαυτό του είναι τετραπλάσιο του γινομένου του ενός μέρους με το άλλο.

2. Διαίρεσα το δέκα σε δύο μέρη. Μετά, πολλαπλασίασα το κάθε ένα με τον εαυτό του και όταν πρόσθεσα τα γινόμενα, το άθροισμα ήταν 58.

3. Διαίρεσα το δέκα σε δύο μέρη και διαίρεσα το πρώτο με το δεύτερο και το δεύτερο με το πρώτο. Το άθροισμα των πηλίκων είναι $2\frac{1}{6}$.

4. Ένα νόμισμα μοιράζεται εξίσου μεταξύ ενός αριθμού ανθρώπων. Εάν προσθέσεις έναν άνθρωπο ακόμα και μοιράσεις πάλι, η αναλογία του κάθε ενός είναι ένα έκτο του νομίσματος λιγότερο από τη πρώτη φορά. Πόσοι άνθρωποι υπήρχαν καταρχήν; Είναι φανερό ότι τα προβλήματα του, δεν είναι «πρακτικά» όπως υποσχέθηκε στον πρόλογο.

Κατά τη περίοδο της Αναγέννησης, όταν η άλγεβρα έφτασε στην Ευρώπη, πολλοί συγγραφείς έγραψαν κείμενα εκθέτοντας ιδέες για την επίλυση των δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Αλλά πάλι, υπήρχαν λίγα προβλήματα που δεν ήταν αφηρημένα.

Girolamo Cardano (1501-1576 Ιταλία). Γιατρός που ασχολήθηκε και με τα μαθηματικά. Το έργο του, Ars Magna (1545) ήταν το πρώτο Λατινικό εγχειρίδιο αφιερωμένο αποκλειστικά στην Άλγεβρα. Τα προβλήματα που ακολουθούν είναι από αυτό το βιβλίο.

1.Υπήρχαν δύο συνεταιρισμοί εκ των οποίων ο ένας είχε τρία μέλη περισσότερα από τον άλλο. Μοίρασαν ίσο αριθμό χρυσών νομισμάτων μεταξύ των μελών τους. Ο αριθμός των χρυσών νομισμάτων που ήταν για μοίρασμα σε κάθε περίπτωση ήταν 93 περισσότερο από το σύνολο των μελών των δύο συνεταιρισμών και τα μέλη του μικρότερου

συνεταιρισμού έλαβαν 6 περισσότερα χρυσά νομίσματα από τα μέλη του μεγαλύτερου συνεταιρισμού. Πόσα μέλη είχε κάθε συνεταιρισμός;
2. Ένας άνθρωπος πήγε στην αγορά τρεις φορές. Τη πρώτη φορά έφερε πίσω τα διπλάσια από όσα είχε πάρει μαζί του. Στη δεύτερη φορά, πήρε μαζί του το διπλό ποσό του και επέστρεψε με το ίδιο συν την τετραγωνική του ρίζα δύον δύο επιπλέον χρυσά νομίσματα. Όλα αυτά τα διατήρησε και επέστρεψε στην αγορά με αυτά για τρίτη φορά. Επέστρεψε, επιπλέον με 310 χρυσά νομίσματα. Πόσα χρυσά νομίσματα είχε πάρει μαζί του τη πρώτη φορά;

Προβλήματα για το σπίτι:

Τα πρώτα έξι είναι από την εργασία του al-Khwarizmi.
1. Πολλαπλασίασα το ένα τρίτο μιας ποσότητας συν ένα με το ένα τέταρτο της ίδιας ποσότητας και το γινόμενο είναι είκοσι. Ποιά είναι η ποσότητα;
2. Διαίρεσα το δέκα σε δύο μέρη και πολλαπλασιάζοντας το ένα από αυτά τα μέρη με το άλλο, το αποτέλεσμα ήταν είκοσι ένα. Ποιά ήταν τα μέρη;
3. Διαίρεσα το δέκα σε δύο μέρη, και αφού πολλαπλασίασα κάθε μέρος με τον εαυτό του, τα πρόσθεσα και πρόσθεσα στο άθροισμα τους την διαφορά των δύο μερών, και το σύνολο είναι πενήντα τέσσερα. Ποια είναι τα μέρη;
4. Βρείτε ένα αριθμό για τον οποίο, εάν το ένα τρίτο του προστεθεί στο 3 και το άθροισμα αφαιρεθεί από τον αριθμό, και το αποτέλεσμα πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του, η απάντηση είναι ο αρχικός αριθμός.
5. Εάν αρχίσεις με έναν αριθμό, μετά αφαιρέσεις το ένα τρίτο του, μετά το ένα τέταρτο του, μετά το ένα πέμπτο του και μετά 4, και εάν μετά πολλαπλασιάσεις το αποτέλεσμα με τον εαυτό του, παίρνεις 12 παραπάνω από τον αρχικό αριθμό. Βρες τον αριθμό.
6. Διαίρεσα το δέκα σε δύο μέρη. Πολλαπλασίασα το ένα μέρος με το δέκα και το άλλο με τον εαυτό του και τα γινόμενα είναι τα ίδια. Ποιά είναι τα μέρη;
Τα δύο επόμενα προβλήματα είναι από την εργασία του Cardano.
7. Υπήρχαν δύο αρχηγοί ο κάθε ένας εκ των οποίων μοίρασε 48 χρυσά νομίσματα στους στρατιώτες του. Αυτός που είχε δύο στρατιώτες λιγότερους είχε 4 νομίσματα περισσότερα για τον κάθε στρατιώτη από τον άλλο. Πόσους στρατιώτες είχε κάθε αρχηγός;
8. Υπάρχει ένας αριθμός τέτοιος ώστε εάν δύο φορές η τετραγωνική του ρίζα προστεθεί σε αυτόν και εάν σε αυτό το άθροισμα δύο φορές η τετραγωνική του ρίζα προστεθεί, δίνει ένα σύνολο 10. Βρείτε τον αριθμό. (Υπόδειξη: Αντιμετωπίστε το με δύο βήματα, αρχίζοντας από το τελικό άθροισμα. Έστω ότι αυτό είναι x^2 ώστε να μπορέσετε εύκολα να βρείτε την τετραγωνική του ρίζα. Το τετράγωνο της λύσης θα είναι το πρώτο ποσό).
Τα επόμενα δύο προβλήματα είναι από την εργασία του Recorde.

Robert Record (1510-1558, Ουαλός). Και αυτός, αρχικά σπούδασε ιατρική. Αργότερα ασχολήθηκε και με την ιστορία και τα μαθηματικά. Ήταν ο πρώτος που εισήγαγε την άλγεβρα στην Αγγλία. Έγραψε μία σειρά από σχολικά εγχειρίδια, και μάλιστα στα Αγγλικά, πιστεύοντας ότι τα μαθηματικά δεν μπορεί να είναι μόνο για αυτούς που γνωρίζουν Λατινικά ή Ελληνικά. Τα προβλήματα είναι από το βιβλίο του *The Whetstone of Witte* (1557) το οποίο θα το μεταφράζαμε *Το Ακονιστήρι της*

εξυπνάδας. Αξίζει τον κόπο να σταθούμε λίγο στον τίτλο που επέλεξε ο Record: *Cosa* είναι η λατινικά το «πράγμα» και το χρησιμοποιούσαν για τον άγνωστο. Οι αλγεβριστές ονομάζονταν cossists και η άλγεβρα για πολλά χρόνια ήταν γνωστή ως η cossic τέχνη. (Το 1525 ο Rudolff δημοσίευσε το βιβλίο *Coss* το οποίο ήταν το πρώτο Γερμανικό εγχειρίδιο άλγεβρας). Η λέξη *cos* είναι η Λατινική λέξη για το *whetstone*, μία πέτρα για να ακονίζονται ξυράφια και εργαλεία.).

9. Υπήρχαν δύο άνθρωποι που είχαν κάποια χρηματικά ποσά, έτσι ώστε το άθροισμα των ποσών του δεύτερου ήταν $3\frac{1}{4}$ φορές του πρώτου. Εάν οι δύο ποσότητες τους πολλαπλασιάζονταν μεταξύ τους και σε αυτό το σύνολο προστίθεντο οι δύο ποσότητες, θα ανέρχονταν σε $142\frac{1}{2}$. Πόσα είχε ο καθένας;

10.Υπάρχει ένας αριθμός, τον οποίο έχω ξεχάσει, και διαιρείται σε δύο μέρη, το πρώτο εκ των οποίων έχω επίσης ξεχάσει. Αλλά το δεύτερο ήταν 4 και θυμάμαι πάντως πως εάν το μέρος που έχω ξεχάσει πολλαπλασιάζονταν με τον εαυτό του και επίσης με 4, αυτοί οι δύο αριθμοί θα είχαν άθροισμα 117. Θα ήθελα να ξέρω ποιός ήταν ο αρχικός αριθμός και ποιό ήταν το μέρος του που ξέχασα.

Παράγοντας τον Τύπο της Δευτεροβάθμιας Εξίσωσης

Οι τεχνικές επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων εμφανίζονται τουλάχιστον πριν 4000 χρόνια, στην αρχαία Μεσοποταμία, σημερινό Ιράκ. Οι μέθοδοι πιθανόν προήλθαν από τις τεχνικές των εποπτών, οι οποίοι ήταν υποχρεωμένοι να εργάζονται με τετράγωνα και ορθογώνια καθώς επόπτευαν εκτάσεις γης για οικοδομικούς σκοπούς. Οι τεχνικές στις οποίες κατέληγαν τελικά διατηρούνταν από τους γραφείς σε πήλινες πινακίδες, γραμμένες σε σφηνοειδή γραφή, εκατοντάδες από τις οποίες ανακαλύφθηκαν τον $20^{ο}$ αι. από τους αρχαιολόγους.

Οι Αιγύπτιοι, οι Κινέζοι και οι Έλληνες μαθηματικοί έλυναν διαφόρων τύπων δευτεροβάθμιες εξισώσεις, το ίδιο και οι Άραβες από τον $9^{ο}$ έως τον $12^{ο}$ αι. Αυτοί οι Άραβες ζούσαν σε μια αυτοκρατορία που εκτεινόταν από την Ισπανία και το Μαρόκο Δυτικά έως το Πακιστάν Ανατολικά και η οποία είχε κοινή γλώσσα τα Αραβικά και κοινή θρησκεία το Ισλάμ.

Ο Muhammad ibn Musa **al-Khwarizmi**, από τους πρώτους Άραβες μαθηματικούς (περίπου 780-850 μ.Χ), εργαζόταν στον Οίκο της Σοφίας στη Βαγδάτη (στο σημερινό Ιράκ). Ο Al-Khwarizmi έγραψε ένα βιβλίο για την άλγεβρα, στο οποίο εμφανίζονται οι λέξεις al-jabr (από όπου και η λέξη άλγεβρα) και al-muqabala. Το όνομα al-Khwarizmi έγινε η σημερινή λέξη αλγόριθμος. Στο βιβλίο του, μεταξύ άλλων λύνει και το ακόλουθο **πρόβλημα :**

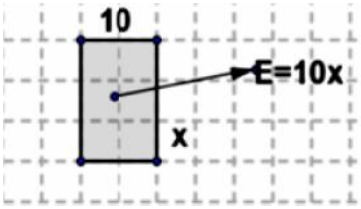
Ποιο πρέπει να είναι το τετράγωνο το οποίο όταν αυξηθεί κατά δέκα από τις ρίζες του, ισοδυναμεί με 39; (με την λέξη τετράγωνο εννοεί αυτό που σήμερα λέμε x^2 και με την λέξη ρίζα εννοεί απλά το x)

Ο Al-Khwarizmi έδινε **οδηγίες** για την επίλυση με λόγια:

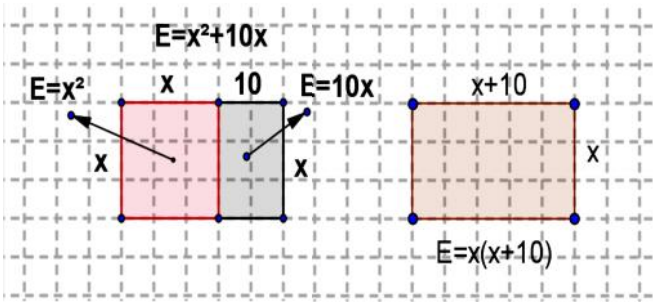
Ποιο πρέπει να είναι το τετράγωνο το οποίο αυξημένο κατά δέκα από τις ρίζες του ισοδυναμεί με 39; Η λύση είναι η εξής: Μοιράζεις στο μισό το πλήθος των ριζών, το οποίο για το παρόν παράδειγμα κάνει πέντε. Αυτό το πολλαπλασιάζεις με τον εαυτό του, το γινόμενο είναι 25. Πρόσθεσε το στο 39. Το άθροισμα είναι 64. Τώρα πάρε τη ρίζα αυτού, που είναι οκτώ και αφαίρεσε από αυτό το μισό πλήθος των ριζών που είναι πέντε. Το υπόλοιπο είναι τρία. Αυτή είναι η ρίζα του τετραγώνου που έψαχνες.

Δραστηριότητα 1

Α) Να διατυπώσουμε το πρόβλημα με σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό.
Β) Ας δούμε τώρα τις οδηγίες που δίνει ο Al-Khwarizmi
Το πλάτος ενός ορθογωνίου είναι 10 μονάδες, το μήκος του είναι άγνωστο.



Κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο στη μία πλευρά του ορθογωνίου με πλευρά το μήκος, όπως φαίνεται στο σχήμα.

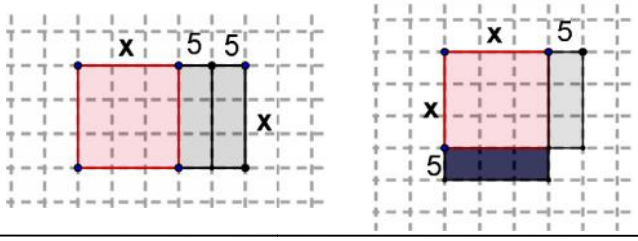


Τα δύο σχήματα μαζί έχουν εμβαδόν 39 μονάδες. Ποιό είναι το μήκος του ορθογωνίου;

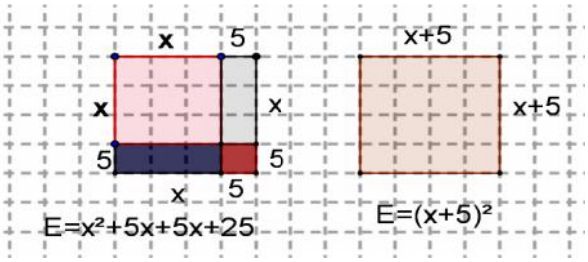
Λύση

Ζητούμενο: Η γεωμετρική λύση της εξίσωσης $x^2+10x=39$

Χωρίζουμε στη μέση το ορθογώνιο με πλευρές 10 και *x* κατακόρυφα και μετά μετακινούμε το ένα μισό στη βάση του τετραγώνου.



Παρατηρούμε ότι αν "συμπληρώσουμε" στην κάτω δεξιά γωνία του σχήματος ένα τετράγωνο πλευράς 5, δηλαδή με εμβαδόν $5^2=25$, τότε δημιουργείτε ένα τετράγωνο με πλευρά x+5, δηλαδή με εμβαδόν $E=(x+5)^2$



Δηλαδή είχαμε ένα ορθογώνιο με εμβαδόν x^2+10x και θέλαμε $x^2+10x=39$
Άρα

$$x^2+10x=39$$
$$x^2+10x+25=39+25$$
$$(x+5)^2=64$$

Οπότε $x+5=\pm 8 \Leftrightarrow x=8-5=3$ ή $x=-8-5=-13$

Βέβαια στη περίπτωση του σχήματος είναι $x=3$.

Να επαναλάβετε τη διαδικασία με ένα ορθογώνιο που έχει πλάτος 8 , άγνωστο μήκος, του οποίου το εμβαδόν μαζί με το τετράγωνο που σχηματίζεται με πλευρά το άγνωστο μήκος, είναι ίσο με 9.

Περιγράψτε ρητά τα βήματα της λύσης.

Δραστηριότητα 2

Ας γενικεύσουμε το πρόβλημα χωρίς τη χρήση συγκεκριμένων αριθμών. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα τύπο που να μας επιτρέπει να λύνουμε όλα τα αντίστοιχα προβλήματα. Γι αυτό θα χρησιμοποιήσουμε γράμματα για να αντιπροσωπεύουμε τους αριθμούς. Θα χρησιμοποιήσουμε το β για να αντιπροσωπεύσουμε το πλάτος, γ για το συνολικό εμβαδόν και ως συνήθως στην άλγεβρα, *x* για το άγνωστο μήκος.

Αρχικά πρέπει να μεταφράσουμε το πρόβλημα σε αλγεβρική εξίσωση και μετά να χρησιμοποιήσουμε τα βήματα της δραστηριότητας 1 για να βρούμε τον άγνωστο.

Το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς *x* είναι…….

Το εμβαδόν ορθογωνίου πλάτους *β* και μήκους *x* είναι …….

Η εξίσωση που δηλώνει ότι το άθροισμα των δύο προηγούμενων εμβαδών ισούται με *γ* είναι ……
Επιλύστε το πρόβλημα όπως στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις

Πρέπει να φτάσετε σε ένα αποτέλεσμα ισοδύναμο με το επόμενο:

$$x = \pm\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \gamma} - \frac{\beta}{2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 2\gamma}}{2}$$

Δηλαδή αυτός ο τύπος δίνει τη λύση μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$x^2 + \beta x = \gamma \ \ \eta \ \ x^2 + \beta x - \gamma = 0$$

Χρησιμοποιείστε το τύπο για να επαληθεύσετε τα αποτελέσματα των προηγούμενων προβλημάτων.

Δραστηριότητα 3

Θέλουμε να γενικεύσουμε τον τύπο ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε εξισώσεις δευτέρου βαθμού άλλης μορφής.

Αρχικά θέλουμε να τον εφαρμόσουμε σε εξισώσεις της μορφής: $\alpha x^2 + \beta x = \gamma$

Για να γίνει αυτό διαιρούμε και τα δύο μέλη με *a*.

Η νέα εξίσωση είναι……...

Τώρα εφαρμόστε τον τύπο σε αυτή την εξίσωση δηλαδή αντικαταστήστε τους νέους συντελεστές.

Ο νέος τύπος είναι ……

Σημειώστε ότι στον τύπο δεν μας ενδιαφέρει εάν *α,β ή γ* είναι θετικοί ή αρνητικοί. Στην αρχαία Μεσοποταμία οι άνθρωποι δεν είχαν καθόλου αρνητικούς αριθμούς, εμείς μπορούμε να τους χρησιμοποιήσουμε παρόλο που δεν είναι και πολύ προφανές πως μπορούμε να μεταφράσουμε τα τετράγωνα και τα ορθογώνια όταν οι αριθμοί είναι αρνητικοί.

Συνεπώς θα εφαρμόσουμε τον τύπο για να λύσουμε την πιο γενική μορφή της δευτεροβάθμιας εξίσωσης **$\alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0$**

Πρέπει να την ξαναγράψουμε στη μορφή του τύπου που έχουμε δηλαδή ο σταθερός όρος στο δεύτερο μέλος.

Έτσι γίνεται ……

Η διαφορά είναι απλά ότι το *γ* έχει αντικατασταθεί από το *–γ*.

Επιλύστε το πρόβλημα όπως στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις

Πρέπει να φτάσετε σε ένα αποτέλεσμα ισοδύναμο με τον τύπο: $x = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$

Βέβαια αλγεβρικά για να έχει νόημα ο προηγούμενος τύπος, πρέπει $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$.

Η εξίσωση ~x² Η xΗ¥Z 0, ~ ÷ 0.

a Z ² J 4~¥	Ρίζες της εξίσωσης
$\Delta > 0$	$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
$\Delta = 0$	$x_{1,2} = -\frac{\beta}{2\alpha}$
$\Delta < 0$	δεν υπάρχουν ρίζες

Άθροισμα και γινόμενο ριζών

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \qquad P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Ασκήσεις

126. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $6x^2 + 12x = 0$ **β)** $\sqrt{2}x^2 - 2x = 0$ **γ)** $\lambda x^2 - 3x = 0$

127. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 - 16 = 0$ **β)** $2x^2 - 4 = 0$ **γ)** $x^2 + 16 = 0$ **δ)** $\lambda x^2 - \lambda^2 = 0$

128. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 - 6\alpha x + 8\alpha^2 = 0$ **β)** $x^2 - 2\left(\alpha^2 + \beta^2\right)x + \left(\alpha^2 - \beta^2\right)^2 = 0$

129. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + \lambda x - 1 = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ.

130. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - \lambda x + \lambda - 1 = 0$ έχει πραγματικές ρίζες.

131. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + \lambda = 0$. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ για την οποία η εξίσωση έχει:

α) ρίζα το 3 **β)** δύο ρίζες πραγματικές και άνισες

γ) μία διπλή ρίζα **δ)** Καμία πραγματική ρίζα

132. Αν η μία ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 2\left(\lambda + 2\right)x + 2\lambda^2 - 2 = 0$ είναι το 2, να βρείτε την άλλη της ρίζα.

133. Αν η εξίσωση $x^2 - 4x + \lambda = 0$ έχει 2 ίσες ρίζες, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$4x^2-(\lambda+1)x+1=0$,έχει 2 ρίζες οι οποίες και να βρεθούν.

134. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-4x-6=0$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) x_1+x_2 **β)** x_1x_2 **γ)** $x_1^2+x_2^2$

δ) $x_1^3+x_2^3$ **ε)** $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ **στ)** $\frac{x_1-1}{x_2+3}+\frac{x_2-1}{x_1+3}$

135. Να βρείτε το πρόσημο των ριζών των παρακάτω εξισώσεων, χωρίς να τις λύσετε.

α) $x^2-6x+3=0$ **β)** $x^2-4x-1=0$

γ) $x^2+3x+2=0$ **δ)** $x^2+5x-\lambda^2=0$, $\lambda\neq 0$

136. Να βρείτε τις εξισώσεις δευτέρου βαθμού που έχουν για ρίζες τα ζεύγη των αριθμών:

α) 2 και –6 **β)** $\frac{1}{3}$ και 2 **γ)** 2α και 3α **δ)** $\frac{\alpha}{2}$ και α^2 **ε)** λ και $\lambda-2$

137. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2+2x-5=0$, να βρείτε τις εξισώσεις που έχουν ρίζες τα ζεύγη:

α) $-x_1, -x_2$ **β)** kx_1, kx_2 **γ)** x_1^2, x_2^2

δ) $x_1x_2^2, x_2x_1^2$ **ε)** $\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}$ **στ)** $2x_1+3, 2x_2+3$

138. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha+\beta=-1$ και \
$\alpha^3\beta+2\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3=-12$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha\cdot\beta=-12$.

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

139. Έστω η εξίσωση $(x-1)^2-(2x-3)\lambda=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Αν x_1, x_2 οι πραγματικές ρίζες της, να δείξετε ότι η παράσταση $K=\left(x_1-\frac{3}{2}\right)\left(x_2-\frac{3}{2}\right)$ είναι ανεξάρτητη του λ.

140. Δίνεται η εξίσωση $x^2+\lambda x-(\lambda^2+1)=0$

α) Να δείξετε ότι έχει δυο ρίζες άνισες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της , να βρεθεί το λ ώστε $x_1^{\,2}+x_2^{\,2}=4$.

141. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες τής εξίσωσης $\lambda x^2-2x-\lambda=0$, $\lambda\neq 0$.

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ, για τις οποίες ισχύει:
$x_1^2+x_2^2>6$.

β) Να βρείτε τη δευτεροβάθμια εξίσωση με ρίζες ρ_1, ρ_2 για τις οποίες ισχύει

$\rho_1+\rho_2=2x_1x_2-3$ και $\rho_1\rho_2=\lambda x_1+\lambda x_2+2$.

142. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για την οποία η εξίσωση $x^2+(\lambda+1)x+\lambda^2-3=0$ έχει ρίζες αντίστροφες.

143. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για την οποία η εξίσωση $x^2+(\lambda^2-9)x+\lambda+2=0$ έχει ρίζες αντίθετες.

144. α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $3x^2-(\lambda^2-5)x-2=0$ έχει δυο πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Να βρεθεί ο λ ώστε οι ρίζες της εξίσωσης να είναι αντίθετες.

145. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες η εξίσωση: $x^2-2(\lambda-1)x+\lambda-4=0$, έχει ρίζες:

α) ετερόσημες **β)** ομόσημες **γ)** θετικές **δ)** αντίθετες **ε)** αντίστροφες

146. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $9x^4+5x^2-4=0$ **β)** $x^4+5x^2+6=0$ **γ)** $x^6-9x^3+8=0$

δ) $x^{10}-33x^5+32=0$ **ε)** $x^{500}+2011x^{250}+1821=0$

147. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $x^2-2|x|-3=0$ **β)** $(x-2)^2-3|x-2|+2=0$

148. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $(x^2-2x)^2-4(x^2-2x)+3=0$ **β)** $\left(x+\frac{1}{x}+1\right)^2-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0$

149. Να λύσετε την εξίσωση: $x^2+\frac{1}{x^2}-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0$

150. Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $(x^2-4x+3)^2-2x^2+8x-9=0$ **β)** $(2x^2+3x-1)^2-5(2x^2+3x+3)+24=0$

Τράπεζα θεμάτων

151. Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2-3\alpha\beta-4\beta^2=0$.

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

β) Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β.

152. Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x^2-5x+\alpha=0$, με παράμετρο $\alpha\neq0$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $|\alpha| \le \frac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς, που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους.

β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης, όταν $\alpha = 2$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$

153. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \beta x + \gamma = 0$ με β, γ πραγματικούς αριθμούς. Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει $|x_1 + x_2| = 4$, τότε:

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β .

β) Να αποδείξετε ότι $\gamma < 4$.

γ) Δίνεται επιπλέον η εξίσωση $x^2 - \beta|x| + 3 = 0$ (1).

Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο (α) ερώτημα, η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες.

154. Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του λ≠0 και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

γ) Αν $\lambda > 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Για κάθε $\lambda > 0$, αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, να αποδείξετε ότι $\sqrt{x_1 x_2} \le \frac{x_1 + x_2}{2}$.

155. Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 + \lambda x - 36 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ , η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία από τις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός ρ.

i) Να δείξετε ότι ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης $2x^2 - \lambda x - 36 = 0$

ii) Να δείξετε ότι:

- $\rho \neq 0$ και
- ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης: $-36x^2 + \lambda x + 2 = 0$

156. α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση:

$x^4+\beta x^2+\gamma=0$ (1) με παραμέτρους $\beta,\ \gamma\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι: Αν $\gamma<0$ τότε

i) $\beta^2-4\gamma>0$

ii) η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

157. α) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο $\Pi=34$ cm και διαγώνιο $\delta=13$ cm

i) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E=60\ \text{cm}^2$.

ii) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

iii) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 40 cm^2 και διαγώνιο 8 cm.

158. Δίνεται η εξίσωση: $x^2-5\lambda x-1=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Αν $x_1,\ x_2$ είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:

i) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$(x_1+x_2)^2-18-7(x_1\cdot x_2)^{24}=0.$$

ii) Για $\lambda=1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $x_1^2x_2-3x_1+4-3x_2+x_1x_2^2$

159. Οι πλευρές $x_1,\ x_2$ ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης: $x^2-4\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)x+16=0,\lambda\in(0,4)$.

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ.

ii) το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου.

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi\geq16$, για κάθε $\lambda\in(0,\ 4)$.

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

160. Οι πλευρές $x_1,\ x_2$ ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-2x+\lambda(2-\lambda)=0$ με $\lambda\in(0,2)$.

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου.

ii) το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου συναρτήσει του λ.

β) Να αποδείξετε ότι $E\leq1$, για κάθε $\lambda\in(0,2)$

γ) Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

161. Δίνονται η εξίσωση: $x^2-2x+\lambda=0$, με παράμετρο $\lambda<1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1,x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

β) Να αποδείξετε ότι $x_1 + x_2 = 2$

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$,τότε :

i) Να δείξετε ότι $x_1 - x_2 = 4$

ii) Να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 την τιμή του λ.

162. Δίνονται η εξίσωση: $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta = (\alpha^2 + 1)^2$.

β) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $p_1 = \alpha$ και $p_2 = -\frac{1}{\alpha}$

γ) Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε: $|p_1 - p_2| = 2$

Ανισώσεις 1ου βαθμού

Οι ανισώσεις ~x H [0 και ~x H Y 0

Είναι: $\alpha x + \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha x > -\beta$

- Αν $\alpha > 0$, τότε: $\alpha x > -\beta \Leftrightarrow \frac{\cancel{\alpha} x}{\cancel{\alpha}} > -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow x > -\frac{\beta}{\alpha}$.
- Αν $\alpha < 0$, τότε: $\alpha x > -\beta \Leftrightarrow \frac{\cancel{\alpha} x}{\cancel{\alpha}} < -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow x < -\frac{\beta}{\alpha}$.

Αν $\alpha = 0$, τότε η ανίσωση γίνεται $0 \cdot x > -\beta$ και

- αν $\beta \geq 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ενώ
- αν $\beta < 0$ είναι αδύνατη.

Ανισώσεις με απόλυτα

1. |x| Y ¯ ę J¯ Y x Y ¯, ¯ [0 **2.** |x| [¯ ę x Y J¯ ή x [¯, ¯ [0

163. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq -2$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης να βρείτε το λ ώστε $x_1 x_2 = -3$.

164. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $|x - 1| \leq 4$ **β)** $|x + 1| > 2$ **γ)** $|x - 3| < -2$

δ) $|x| \geq -5$ **ε)** $|x - 5| \leq 0$ **στ)** $|x - 2| > 0$ ζ) $\sqrt{x^2 - 8x + 16} \leq 5$

165. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $3|x|-6<0$ **β)** $2|x|-12>0$ **γ)** $5-|x|\geq 0$

δ) $5|x|+20>0$ **ε)** $3|x|+9<0$ **στ)** $\frac{1}{|x-2|}\leq 1$

ζ) $3|-|x||-6<0$ **η)** $\sqrt{x^2-4x+4}\leq 6$ **θ)** $\sqrt{x^2+10x+25}\geq 3$

166. α) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2-x-6=0$ (1)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1|<2$ (2)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2).

167. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις: **α)** $1\leq|x|\leq 4$ **β)** $2<|x-3|\leq 5$

168. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $||x-2|-3|<1$ **β)** $||x-1|-2|\geq 3$ **γ)** $||x|-3|\leq 1$

δ) $|5-|x-1||\geq 3$ **ε)** $||x+2|-3|<4$ **στ)** $||3-2x|-1|>4$

169. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $\frac{2|2x-1|+11}{4}-\frac{4-|2x-1|}{2}>\frac{|1-2x|}{3}$ **β)** $\frac{|x-2|+1}{2}-\frac{3-|x-2|}{3}>\frac{1}{3}$

Τράπεζα θεμάτων

170. Έστω Α και Β τα σημεία που παριστάνουν σε έναν άξονα τους αριθμούς -4 και 6 και Μ το μέσο του τμήματος ΑΒ.

α) Ποιος αριθμός αντιστοιχεί στο σημείο Μ;

β) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης $|x-6|\leq|x+4|$ και να βρείτε τις λύσεις της.

γ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το συμπέρασμά σας

171. Έστω Α και Β τα σημεία που παριστάνουν σε έναν άξονα τους αριθμούς 2 και 6 και Μ το μέσο του τμήματος ΑΒ.

α) Ποιος αριθμός αντιστοιχεί στο σημείο Μ;

β) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της εξίσωσης $|x-2|+|x-6|=4$ και να βρείτε τις λύσεις της.

γ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το συμπέρασμά σας.

Ανισώσεις 2ου βαθμού

Πρόσημο των τιμών του τριωνύμου

Αν $\Delta > 0$, τότε $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$ και το πρόσημο των τιμών της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f(x)$	ομόσημο του α	0	ετερόσημο του α	0	ομόσημο του α

Αν $\Delta = 0$, τότε: $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ και το πρόσημο των τιμών της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	$-\beta/2\alpha$	$+\infty$
$f(x)$	ομόσημο του α	0	ομόσημο του α

Αν $\Delta < 0$, τότε $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$ και το πρόσημο των τιμών της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	ομόσημο του α	

172. Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις:

α) $3x^2 \geq 12x$ **β)** $2x^2 - 32 \leq 0$ **γ)** $x^2 \leq 2x$ **δ)** $3x^2 - 12 \geq 0$

173. Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις:

α) $3x^2 + 7x + 2 > 0$ **β)** $-3x^2 + 7x - 4 > 0$ **γ)** $x^2 + x \leq 2$ **δ)** $2x^2 + 40 \geq 18x$

174. Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις:

α) $x^2 + 16 > 8x$ **β)** $3x^2 - 12x + 12 \geq 0$ **γ)** $9x^2 + 4 \leq 12x$

175. Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις:

α) $x^2 - 3x + 5 \leq 0$ **β)** $2x^2 - 12x + 18 < 0$ **γ)** $-5x^2 + 4x - 1 < 0$

176. Δίνεται η εξίσωση $4x^2 - 8\lambda x + 17\lambda - 4 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση:

α) έχει ρίζες άνισες **β)** έχει ρίζες ίσες **γ)** είναι αδύνατη

177. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^2-(\lambda+2)x+2\lambda-1=0$ έχει ρίζες άνισες για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ.

178. Δίνεται η εξίσωση $x^2+2\lambda x+\lambda-2=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει: $x_1+x_2=-x_1\cdot x_2$.

179. Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες η ανίσωση $x^2-2\lambda x+3\lambda-2>0$ αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Τράπεζα θεμάτων

180. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2-3x+1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του.

β) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες: $2x^2-3x+1<0$.

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{1}{\sqrt{2}}$ και $\frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι λύσεις της ανίσωσης $2x^2-3x+1<0$.

181. Δίνεται το τριώνυμο: $A=3x^2+9x-12,\ x\in\mathbb{R}$

α) Να λύσετε την ανίσωση $A\le 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (α). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

182. α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2-10x+21<0$.

β) Δίνεται η παράσταση: $A=|x-3|+|x^2-10x+21|$.

i) Για $3<x<7$, να δείξετε ότι: $A=-x^2+11x-24$

ii) Να βρείτε τις τιμές του $x\in(3,7)$, για τις οποίες ισχύει $A=6$.

183. Δίνεται το τριώνυμο: x^2-2x-8

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x.

β) Αν $k=-\frac{8889}{4444}$, είναι η τιμή της παράστασης: $\kappa^2-2\kappa-8$ μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Αν ισχύει $-4<\mu<4$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της τιμής της

παράστασης: $\mu^2 - 2|\mu| - 8$;Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

184. α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 5x - 6 < 0$.

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5\frac{46}{47} - 6$ και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

γ) Αν $\alpha \in (-6,6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

185. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)$ για τις διάφορες τιμές του x.

β) Να προσδιορίσετε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου: $f(2,999) \cdot f(-1,002)$.

γ) Αν $-3 < \alpha < 3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού: $-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$.

186. α) Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2,\ x \in \mathbb{R}$.Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου.

β) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α, β διαφορετικούς από το 0 με $\alpha < \beta$ για τους οποίους ισχύει $(\alpha^2 - 3\alpha + 2)(\beta^2 - 3\beta + 2) < 0$.

Να αποδείξετε ότι ισχύει $|(\alpha - 1)(\beta - 2)| = (\alpha - 1)(\beta - 2)$.

187. Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Για ποιες τιμές του λ το παραπάνω τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda \le 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

188. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x + (\lambda^2 + \lambda - 1) = 0$ (1) , με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $S^2 - P - 2 \ge 0$, όπου *S* και *P* είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1).

189. Δίνεται η εξίσωση $(x-2)^2 = \lambda(4x-3)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να γράψετε την εξίσωση στη μορφή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \ne 0$.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ) Αν $x_1,\ x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης, στην περίπτωση που έχει ρίζες πραγματικές και άνισες,

i) να υπολογίσετε τα $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 x_2$.

ii) να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = (4x_1 - 3)(4x_2 - 3)$ είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή.

190. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0 < d(x_1, x_2) < 2$.

Η Έννοια της Συνάρτησης

Ο Euler και οι Συναρτήσεις

Ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς όλων των εποχών ήταν ο Leonhard Euler, που γεννήθηκε στην Ελβετία αλλά έζησε το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του στην Αγ.Πετρούπολη και στο Βερολίνο. Στο κεφάλαιο 1 του έργου του *Introductionto Analysis of the Infinite* (1748) συζητά την έννοια της συνάρτησης. Παρουσιάζουμε εδώ μερικά αποσπάσματα:

§4: ***Συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας είναι μία αναλυτική έκφραση που αποτελείται με οποιοδήποτε τρόπο από τη μεταβλητή ποσότητα και αριθμούς ή σταθερές ποσότητες.*** Γι αυτό κάθε αναλυτική έκφραση στην οποία όλες οι συνιστώσες ποσότητες εκτός από τη μεταβλητή x είναι σταθερές, θα είναι συνάρτηση του x, έτσι, a + 3x, ax – $3x^2$, c^x είναι συναρτήσεις του x.

§6:***Η κύρια διάκριση μεταξύ συναρτήσεων, ως προς τη μέθοδο συνδυασμού της μεταβλητής ποσότητας και των σταθερών ποσοτήτων καταγράφεται (θεωρείται) εδώ.*** Πράγματι, εξαρτάται από τις πράξεις με τις οποίες οι ποσότητες διευθετούνται και εμπλέκονται μεταξύ τους. Αυτές οι πράξεις είναι η πρόσθεση, η αφαίρεση, ο πολλαπλασιασμός, η διαίρεση, η ύψωση σε δύναμη και η εξαγωγή ρίζας ... Εκτός από αυτές τις πράξεις οι οποίες συνήθως ονομάζονται αλγεβρικές, υπάρχουν πολλές άλλες που είναι υπερβατικές, όπως εκθετικές, λογάριθμοι και άλλες τις οποίες ο ολοκληρωτικός λογισμός παρέχει εν αφθονία.

§7: ***Οι συναρτήσεις διαιρούνται σε αλγεβρικές και υπερβατικές. Οι πρώτες είναι αυτές που γίνονται μόνο από αλγεβρικές πράξεις, οι δεύτερες είναι αυτές που εμπεριέχουν υπερβατικές πράξεις.*** Έτσι, τα πολλαπλάσια και οι δυνάμεις του x είναι αλγεβρικές συναρτήσεις, επίσης αναμφίβολα όλες οι εκφράσεις που σχηματίζονται από τις αλγεβρικές πράξεις που ανακαλέσαμε προηγουμένως.... Κάτι άλλο θα έπρεπε να σημειωθεί για τις υπερβατικές συναρτήσεις και αυτό είναι το γεγονός ότι η συνάρτηση θα είναι υπερβατική μόνο εάν η υπερβατική πράξη όχι μόνο εισέρχεται σε αυτή, αλλά πραγματικά επηρεάζει τη μεταβλητή ποσότητα. Εάν οι υπερβατικές πράξεις αναφέρονται μόνο στις σταθερές, η συνάρτηση πρέπει να θεωρείται αλγεβρική.

§8: ***Οι αλγεβρικές συναρτήσεις υποδιαιρούνται σε ρητές και άρρητες συναρτήσεις: οι πρώτες είναι τέτοιες που η μεταβλητή ποσότητα δεν εμπλέκεται με κανένα τρόπο με την αρρητότητα, οι δεύτερες είναι αυτές στις οποίες η μεταβλητή ποσότητα επηρεάζεται από σύμβολα ριζών.*** Έτσι, στις μη-άρρητες συναρτήσεις δεν υπάρχουν άλλες πράξεις εκτός από πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση και ύψωση σε δυνάμεις με εκθέτες ακέραιους. Για παράδειγμα, α + x, α – x, αx, $\frac{a^2+x^2}{a+x}$, $\alpha x^3-\beta x^5$ είναι μη-άρρητες συναρτήσεις του x. Εκφράσεις όπως $\sqrt{x}$, είναι άρρητες συναρτήσεις του x.

§9:***Οι μη-άρρητες συναρτήσεις υποδιαιρούνται σε πολυωνυμικές και ρητές συναρτήσεις.*** Σε μία πολυωνυμική συνάρτηση η μεταβλητή x δεν έχει αρνητικούς εκθέτες όπου περιέχει κλασματικές εκφράσεις στις οποίες υπεισέρχεται η μεταβλητή x στους παρονομαστές. Ως ρητές συναρτήσεις νοούνται αυτές στις οποίες οι παρονομαστές περιέχουν το x ή αυτές στις οποίες εμφανίζονται αρνητικοί εκθέτες του x . Αυτός λοιπόν είναι ο γενικός τύπος για τις πολυωνυμικές συναρτήσεις:
$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + ...$ Όλες οι ρητές συναρτήσεις, πάντως, αφού το άθροισμα διαφόρων κλασμάτων μπορεί να εκφραστεί ως ένα απλό κλάσμα, περιέχονται στον ακόλουθο τύπο:

$$\frac{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5+\cdots}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\zeta x^5+\cdots}$$

όπου θα έπρεπε να σημειωθεί ότι οι σταθερές ποσότητες a, b, c, d, κλπ και α, β, γ, δ, κλπ είτε είναι θετικές είτε αρνητικές, ρητές ή άρρητες, ή ακόμα και υπερβατικές, δεν αλλάζουν τη φύση των συναρτήσεων.

§10: ***Τέλος, πρέπει να διακρίνουμε μεταξύ*** **μονότιμων (*single-valued*) συναρτήσεων και συναρτήσεων πολλαπλών τιμών(*multiple-valuedfunctions*)**.Μία μονότιμη συνάρτηση είναι αυτή για την οποία, ανεξάρτητα του ποιά τιμή θα δοθεί στην μεταβλητή x, μία μόνο τιμή της συνάρτησης προσδιορίζεται. Από την άλλη μία συνάρτηση πολλαπλών τιμών, είναι αυτή για την οποία αν αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή x με κάποια τιμή, προσδιορίζονται διάφορες τιμές της συνάρτησης. Έτσι, όλες οι μη-άρρητες συναρτήσεις, είτε πολυωνυμικές είτε ρητές, είναι μονότιμες συναρτήσεις, αφού τέτοιου είδους εκφράσεις, όποια τιμή και αν δοθεί στη μεταβλητή x, παράγουν μία μοναδική τιμή. Παρόλα αυτά, οι άρρητες συναρτήσεις είναι όλες πολλαπλών τιμών επειδή τα σύμβολα των ριζών είναι διφορούμενα και δίνουν ζεύγη τιμών.

§16:***Εάνγ είναι όποιου τύπου συνάρτηση του x, τότε παρομοίως, το x θα είναι συνάρτηση του y.*** Αφού το y είναι συνάρτηση του x, είτε μονότιμη είτε πολλαπλών τιμών, δίνεται μια εξίσωση με την οποία καθορίζεται το y μέσω του x και σταθερών ποσοτήτων. Από την ίδια εξίσωση μπορεί να οριστεί το x μέσω του y και σταθερών. Αφού το y είναι μια μεταβλητή ποσότητα, το x θα είναι εξίσου μία έκφραση που αποτελείται από το y και σταθερές και γι αυτό τον λόγο θα είναι συνάρτηση του y.

Ερωτήσεις:

1.Συγκρίνετε την περιγραφή της συνάρτησης της §4 με τον ορισμό του βιβλίου σας.

2.OEuler αναφέρει δύο είδη υπερβατικών πράξεων στην §6, δηλαδή, εκθετικές και λογαρίθμους. Δώστε άλλα παραδείγματα υπερβατικών πράξεων.

3. Κατηγοριοποιείστε τις ακόλουθες συναρτήσεις ως αλγεβρικές ή υπερβατικές σύμφωνα με την §7.

a. $x^3 + 5x$ b. $\sqrt{x+5}$ c. $\dfrac{x^2+5}{x^3-7x^2+3}$

d. $(x^2+5)^{1/4}$ e. $\dfrac{\sqrt{x^2+5}}{x-2}$ f. $\sqrt{2}+3x+\sqrt{5}x^2$

4. Κατηγοριοποιείστε τις ακόλουθες αλγεβρικές συναρτήσεις ως μη-άρρητες ή άρρητες, σύμφωνα με την §8

a. $x^3 + 5x$ b. $\sqrt{x+5}$ c. $\dfrac{x^2+5}{x^3-7x^2+3}$

d. $(x^2+5)^{1/4}$ e. $\dfrac{\sqrt{x^2+5}}{x-2}$ f. $\sqrt{2}+3x+\sqrt{5}x^2$

5.Δώστε τρία παραδείγματα πολυωνυμικών και τρία παραδείγματα ρητών συναρτήσεων σύμφωνα με την §9 του Euler. Να συμπεριλάβετε στα παραδείγματα σας σταθερές ποσότητες αρνητικές, κλάσματα και άρρητες.

6. Πως ονομάζουμε σήμερα την μονότιμη συνάρτηση και την πολλαπλών τιμών συνάρτηση της §10;

7. Τι εννοεί ο Euler με την τελευταία πρόταση της §10 ότι «τα σύμβολα των ριζών είναι διφορούμενα και δίνουν ζεύγη τιμών;» Θεωρούμε σήμερα τα σύμβολα των ριζών διφορούμενα; Τι έχουμε αλλάξει στον ορισμό αυτών των συμβόλων ριζών;

8. Τι περιγράφει ο Euler στην §16;

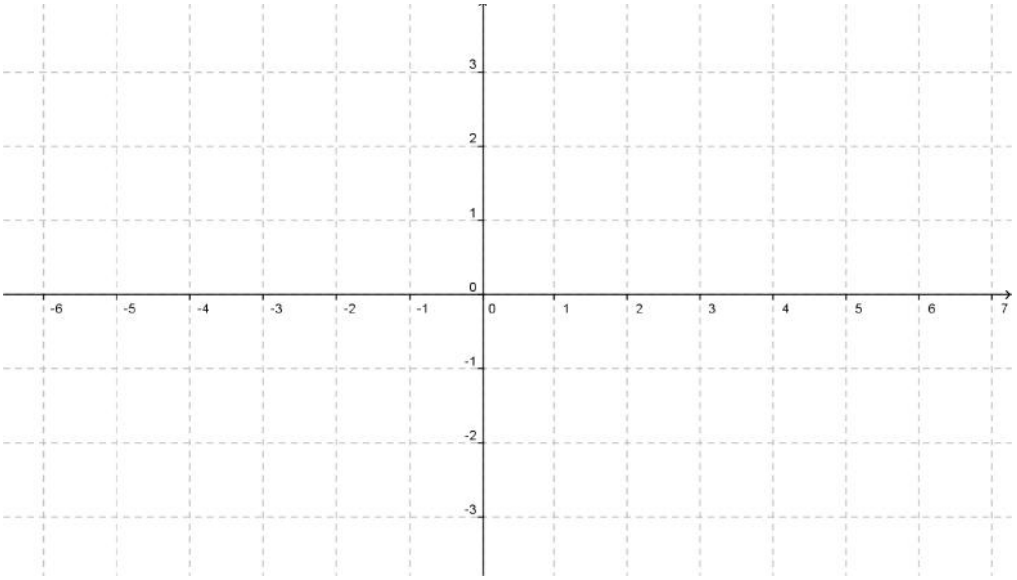
9. Με βάση αυτή τη περιγραφή εξηγείστε γιατί λειτουργεί ο σημερινός αλγόριθμος για την εύρεση της αντίστροφης. (Θυμηθείτε ότι ο αλγόριθμος αρχίζει μετά με την επίλυση ως προς x και στο τέλος, εναλλάσσουμε τα x και y). Μπορεί να επιλέξετε τη y = 2x + 1 = f(x) ως παράδειγμα. Συμπεριλάβετε ένα πίνακα τιμών και για την συνάρτηση και για την αντίστροφη. Επίσης να σχεδιάσετε και τις δύο συναρτήσεις.

Δηλώστε τη συνάρτηση σας

x	y

Δηλώστε την αντίστροφη της

x	y



10. Χρησιμοποιείστε την γραφική παράσταση και τον ορισμό της μονότιμης συνάρτησης του Euler για να εξηγήσετε γιατί λειτουργεί ο έλεγχος με τη βοήθεια της κάθετης ευθείας

11.Σήμερα λέμε ότι οι γραφικές παραστάσεις αντίστροφων συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x. Γιατί αληθεύει αυτό;

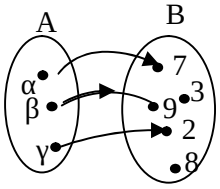
Ορισμός συνάρτησης

Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο του Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β.

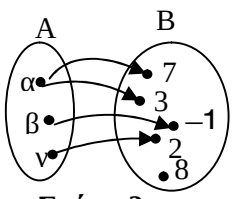
- Το σύνολο Α λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης.
- Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές μιας συνάρτησης f για όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με **f(A)**.
- Αν με μια συνάρτηση f το $x \in A$ αντιστοιχίζεται στο $y \in B$, τότε γράφουμε $y = f(x)$.

Το γράμμα x που παριστάνει οποιαδήποτε στοιχείο του Α λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το y, που παριστάνει την τιμή της f στο x, λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

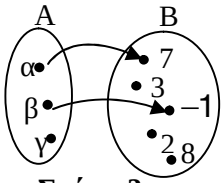
191. Ποιες από τις παρακάτω αντιστοιχίσεις είναι συναρτήσεις και ποιες δεν είναι; Ποιο είναι το πεδίο ορισμού και ποιο το σύνολο τιμών σε κάθε περίπτωση;



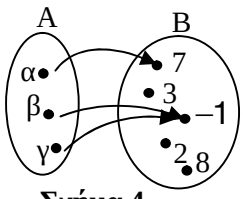
Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3



Σχήμα 4

192. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 3$ **β)** $g(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$ **γ)** $g(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$

δ) $h(x) = 2x^5 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{x^3}{x+3}$ **ε)** $h(x) = 2 - \dfrac{x}{x+2} + \dfrac{x-1}{x-2}$

στ) $t(x) = \dfrac{x-1}{x^2-5x+6}$ **ζ)** $t(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-4x+3}$

η) $\varphi(x) = \dfrac{x+4}{x^3-4x} - 2 + \dfrac{1}{x^2+2x}$ **θ)** $\varphi(x) = \dfrac{x}{x^2-7x+10} - \dfrac{6-x}{x^2-5x+6}$

193. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \sqrt{x-2}$ **β)** $g(x) = \sqrt{4-x} - 3x\sqrt{x+2}$ **γ)** $h(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-3}}$

δ) $t(x) = \dfrac{\sqrt{|x|-2}}{x-3}$ **ε)** $\varphi(x) = \dfrac{\sqrt{|x|-x}}{|x|-2}$ **στ)** $\sigma(x) = \dfrac{3x-4}{|x|+x} - \sqrt{x^2+1}$

194. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \sqrt{x-1}$ **β)** $g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{2-x}$ **γ)** $h(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$

δ) $t(x)=\dfrac{\sqrt{|x|-1}}{|x|-2}$ **ε)** $\varphi(x)=\dfrac{\sqrt{3-|x|}}{|x|-1}$ **στ)** $\sigma(x)=\dfrac{2x+5}{|x|-x}-\sqrt{x^2+9}$

195. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της Α.

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-5x+3$.

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει : $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$.

196. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\begin{cases}3x^2-5, & -3<x<4\\ \dfrac{3}{x}, & 4\le x\le 12\end{cases}$ **β)** $f(x)=\begin{cases}3x-4, & x\le 1\\ x^2-2, & x>1\end{cases}$

197. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ, για τις οποίες η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3-8x}{x^2-4x-\lambda}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

198. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases}2x+4, & x<0\\ x-1, & x\ge 0\end{cases}$

α) Να δείξετε ότι $f(-1)=f(3)$.

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$,ώστε $f(x)=0$.

199. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\dfrac{1}{x}, x\neq 0$

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f(1)-f(2)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\dfrac{5}{2}$.

200. 5.‘Εστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=5x$. Να δειχθεί ότι:

α) $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$ **β)** $f(3\alpha)=3f(\beta)$

γ) $f(\alpha)f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)=25$ **δ)** $f(|\alpha|)=|f(\alpha)|$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

201. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+4$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(6)$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(\alpha\beta)+4f(\alpha+\beta)-8\alpha\beta=f(\alpha)f(\beta)+4$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(\alpha+1)=8$.

202. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}3x-2, & x<0\\ x^2-2x+4, & x\geq 0\end{cases}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-3), f(2), f(1), f(-1), f(0)$.

β) Να αποδείξετε ότι: $f(-3)+f(2)+f(1)+f(0)-5=f(-1)$.

203. Αν $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\in Z\\ -5x, & x\notin Z\end{cases}$ να υπολογιστούν τα $f(0), f(\sqrt{2}), f(-2), f(2), f\left(\frac{1}{2}\right)$.

204. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x, & |x|\leq 1\\ \frac{1}{x}, & |x|\geq 1\end{cases}$.

Να υπολογίσετε τα $f\left(\frac{1}{2}\right), f(-2), f(-\sqrt{2}), f\left(\frac{\pi}{4}\right), f(1)$)

205. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2-4}{|x|-2}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της

β) Να απλοποιηθεί ο τύπος της

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f(x)>3$.

206. Μια ορθογώνια περιοχή έχει περιφραχτεί από τις τρεις πλευρές της, με συρματόπλεγμα μήκους 100μ. Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος. Αν το μήκος του τοίχου είναι x, να εκφράσετε το εμβαδόν της περιοχής ως συνάρτηση του x.

207. Ένα κυλινδρικό φλιτζάνι ανοικτό από πάνω, κατασκευάζεται έτσι ώστε το ύψος του και το μήκος της βάσης του να έχουν άθροισμα 20εκ. Αν το φλιτζάνι έχει ύψος h εκ. να εκφράσετε τον όγκο του ως συνάρτηση του h. Αν η ακτίνα βάσης είναι r, να εκφράσετε το εμβαδόν της επιφάνειας του, ως συνάρτηση του r.

208. Σύρμα μήκους 20εκ. κόβεται σε δύο κομμάτια με μήκη x και 20-x εκ. Με το πρώτο κομμάτι σχηματίζουμε τετράγωνο και με το δεύτερο, ισόπλευρο τρίγωνο. Να βρεθεί το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων, ως συνάρτηση του x.

209. Δύο πλοία Π_1 και Π_2 αναχωρούν συγχρόνως από ένα λιμάνι Λ. Το πλοίο Π_1 κινείται ανατολικά με ταχύτητα 15km/h και το Π_2 βόρεια, με ταχύτητα 20km/h.

α) Να βρεθούν οι συναρτήσεις θέσεως των Π_1 και Π_2.

β)Να εκφραστεί η απόσταση d=($\Pi_1\Pi_2$) των δύο πλοίων, ως συνάρτηση του χρόνου t.

Τράπεζα θεμάτων

210. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \left(\lambda - \lambda^2\right) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Να βρείτε το λ, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - x + \lambda - \lambda^2}$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

211. Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

- $|1 - 3\alpha| < 2$
- Η απόσταση του αριθμού β από τον αριθμό 2 είναι μικρότερη του 1.

α) Να αποδειχθεί ότι $-\frac{1}{3} < \alpha < 1$.

β) Να αποδειχθεί ότι $|\beta - 3\alpha - 1| < 3$.

γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4(\beta - 2)x + \beta^2}$ έχει πεδίο ορισμού όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

212. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - 4\right)}{x^2 + \kappa x + \lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των κ, λ.

β) Για $\kappa = 1$ και $\lambda = -2$,

i) να απλοποιήσετε τον τύπο της g.

ii) να δείξετε ότι: $g(\alpha + 3) > g(\alpha)$ όταν $\alpha \in (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

213. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - 4\right)}{x^2 + \kappa x + \lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των κ, λ.

β) Για $\kappa = 1$ και $\lambda = -2$,

i) να απλοποιήσετε τον τύπο της g.

ii) να δείξετε ότι: $g(\alpha) \cdot g(\beta) > 0$ όταν $\alpha, \beta \in (-1, 1) \cup (1, 2)$.

Γραφική παράσταση Συνάρτησης

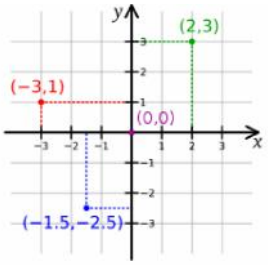
Cogito Ergo Sum

Rene Descartes (1596 –1650) Γάλλος μαθηματικός και φιλόσοφος, ήταν μαθητής σε σχολείο Ιησουιτών και φιλάσθενος. Για τον λόγο αυτό, οι μοναχοί είχαν δώσει εντολή τα πρωινά να μένει στο κρεβάτι προκειμένου να ανακτά τις δυνάμεις του. Αυτά τα πρωινά δεν ήταν χαμένος χρόνος. Ο Descartes τα χρησιμοποιούσε για να ασχοληθεί με τα μαθηματικά και τη φιλοσοφία. Σύμφωνα με μία «εκδοχή», ένα τέτοιο πρωινό, παρακολουθώντας το πέταγμα μιας μύγας, αναρωτήθηκε πως θα μπορούσε να καθορίσει τη θέση της στο χώρο καθώς και τη διαδρομή που ακολουθούσε πετώντας (προφανώς δεν πρόκειται για εξακριβωμένο ιστορικό γεγονός).

Αυτή ήταν η αρχή της **Αναλυτικής Γεωμετρίας**, ενός κλάδου των μαθηματικών που συνδυάζει την Άλγεβρα με την Γεωμετρία, σε ένα πανίσχυρο μαθηματικό εργαλείο.

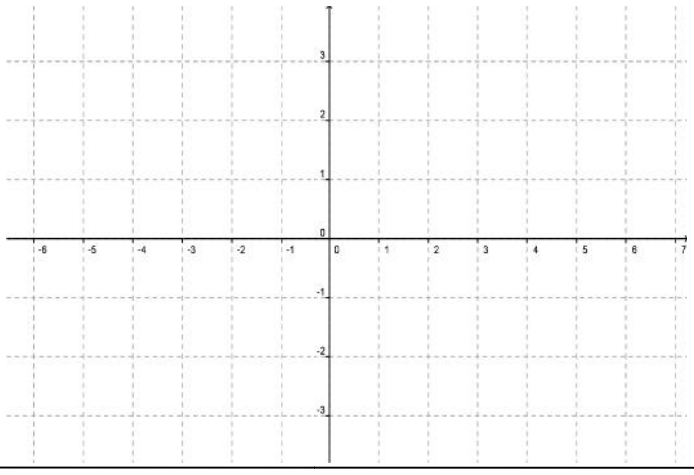
Ο Descartes παρουσίασε την Αναλυτική του Γεωμετρία στο βιβλίο του *Discours de la Methode (Συζήτηση για την Μέθοδο)* το οποίο εκδόθηκε το 1637 και ειδικότερα στο επίτομο του στο, ***La Geometrie*** (ένα από τα πιο διάσημα όσο και δύσκολα, βιβλία μαθηματικών).

Η βασική ιδέα είναι η αντιστοίχιση κάθε σημείου του επιπέδου με ένα ζεύγος συντεταγμένων (x,y) αλλά και αντίστροφα.



Έστω δύο σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$

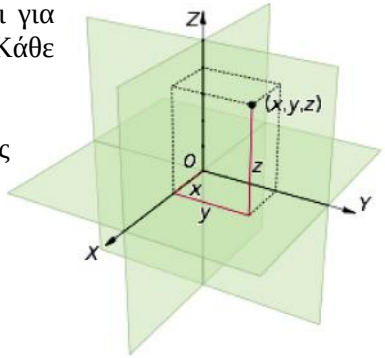
1. **Τοποθετείστε τα δύο τυχαία σημεία Α και Β στο πρώτο τεταρτημόριο**
2. **Σχεδιάστε το ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα την ΑΒ και έστω Γ η ορθή γωνία.**
3. **Προσπαθήστε να εκφράσετε τα μήκη των πλευρών ΑΓ και ΒΓ σαν συνάρτηση των συντεταγμένων των Α και Β**
   ΑΓ = **ΒΓ =**
4. **Με την βοήθεια του Πυθαγορείου Θεωρήματος προσπαθήστε να εκφράσετε την ΑΒ σαν συνάρτηση των συντεταγμένων των σημείων Α και Β**
   AB^2 = **άρα ΑΒ =**



Η Αναλυτική Γεωμετρία μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τον εντοπισμό αντικειμένων στο τρισδιάστατο χώρο. Κάθε σημείο αντιπροσωπεύεται από τρεις συντεταγμένες (x,y,z).

Αν τα δύο σημεία έχουν αντίστοιχα συντεταγμένες (x_1, y_1, z_1) και (x_2, y_2, z_2) τότε η μεταξύ τους απόσταση δίνεται από τον τύπο

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων λέγεται ένα ζεύγος κάθετων αξόνων x΄x και y΄y με κοινή αρχή Ο. Συμβολίζεται με **Oxy**.
Το επίπεδο στο οποίο ορίστηκε το σύστημα αυτό λέγεται **καρτεσιανό επίπεδο**.
Αν επιπλέον οι μονάδες των αξόνων έχουν το ίδιο μήκος το σύστημα Oxy λέγεται **ορθοκανονικό**. Ο οριζόντιος άξονας x΄x καλείται **άξονας των τετμημένων** ή **άξονας των x** και ο κατακόρυφος άξονας y΄y καλείται **άξονας των τεταγμένων** ή **άξονας των y**.
Σε κάθε σημείο Μ του καρτεσιανού επιπέδου αντιστοιχίζουμε ένα διατεταγμένο ζευγάρι (x,y) πραγματικών αριθμών που ονομάζονται **συντεταγμένες** του σημείου Μ. Το σημείο συμβολίζεται με Μ(x,y). Το x λέγεται **τετμημένη** και το y **τεταγμένη** του σημείου Μ.
Οι άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα μέρη καθένα που ονομάζονται **τεταρτημόρια** και διακρίνονται σε 1^o , 2^o , 3^o , 4^o.

Συμμετρίες

- Το σημείο $M_1(\alpha, -\beta)$ είναι το συμμετρικό του σημείου $M(\alpha,\beta)$ **ως προς τον άξονα x΄x**. Δηλαδή δύο σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x έχουν την ίδια τετμημένη και αντίθετες τεταγμένες.
- Το σημείο $M_2(-\alpha,\beta)$ είναι το συμμετρικό του σημείου $M(\alpha,\beta)$ **ως προς τον άξονα y΄y**. Δηλαδή δύο σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y έχουν την ίδια τεταγμένη και αντίθετες τετμημένες.
- Το σημείο $M_3(-\alpha,-\beta)$ είναι το συμμετρικό του σημείου $M(\alpha,\beta)$ **ως προς την αρχή Ο των αξόνων**.

Δηλαδή δύο σημεία συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων έχουν αντίθετες συντεταγμένες.

- Το σημείο $M_4(\beta,\alpha)$ είναι το συμμετρικό του σημείου $M(\alpha,\beta)$ **ως προς την διχοτόμο της $1^{ης}$ και $3^{ης}$ γωνίας των αξόνων.**

Δηλαδή δύο σημεία συμμετρικά ως προς την διχοτόμο της $1^{ης}$ και $3^{ης}$ γωνίας των αξόνων «αλλάζουν» τις συντεταγμένες τους.

Απόσταση δύο σημείων

Η απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, δίνεται από τον τύπο:

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

214. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ , ώστε τα σημεία $A(\kappa,4)$ και $B(2,3\lambda-2)$, να είναι:

α) Συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x.
β) Συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y.
γ) Συμμετρικά ως προς την αρχή Ο των αξόνων.

215. Δίνονται τα σημεία $A(3,2)$ και $B(7,-4)$. Να βρεθεί σημείο Γ του άξονα x΄x, ώστε το τρίγωνο ΓΑΒ να είναι:

α) ισοσκελές με κορυφή το Γ **β)** ορθογώνιο στο Γ.

216. Να βρείτε τα σημεία στα οποία οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων τέμνουν τους άξονες.

α) $f(x)=3x-6$ **β)** $f(x)=x^2-2x-8$ **γ)** $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+x}$

δ) $f(x)=\sqrt{x+2}$ **ε)** $f(x)=\sqrt{x^2-1}+x^4$ **στ)** $f(x)=|x-1|+2$

217. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

α) $f(x)=x^2+3x-2$ και $g(x)=3x+2$

β) $f(x)=\dfrac{6x+12}{x+1}$ και $g(x)=x+2$

218. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2x-1 & -2\le x<\dfrac{1}{2}\\ x^2+1 & \dfrac{1}{2}\le x<3\end{cases}$ Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες x΄x, y΄y.

219. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=x^2$ και $g(x)=\lambda x+(1-\lambda)$, $x\in\mathbb{R}$ και λ παράμετρος με $\lambda\neq 0$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

β) Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό;

γ) Αν $\lambda\neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g, να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει: $(x_1+x_2)^2=|x_1+x_2|+2$.

220. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=(x-1)^2-4$ και $g(x)=|x-1|+2$, με $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

β) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g

βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

γ)Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

221. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να βρείτε:

α) Το πεδίο ορισμού της.

β)Το σύνολο τιμών της.

γ) Τις τιμές $f(0), f(-3), f(2)$.

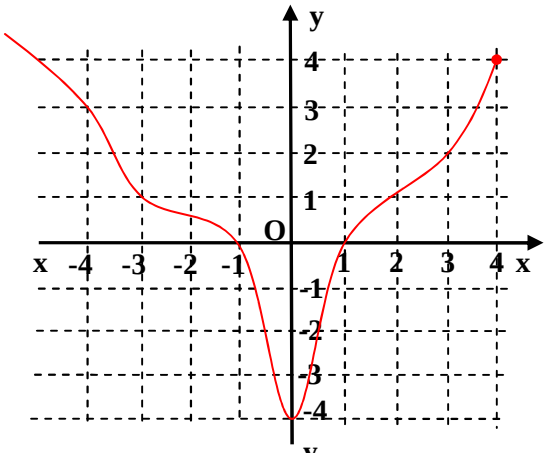
δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

ε) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=-4$.

στ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<0$.

ζ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>1$.

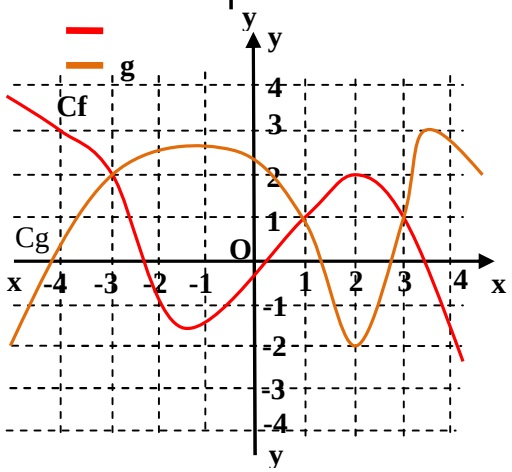
η) Να λύσετε την ανίσωση $1\le f(x)\le 3$.



222. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g.

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>g(x)$.



223. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha x-\alpha+2$ και $g(x)=x^2-\alpha+3$ με $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο (1, 2) για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α .

β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:

i) Να βρείτε την τιμή του α .

ii) Για την τιμή του α που βρήκατε υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g; Αιτιολογήστε την απάντησή σας

Τράπεζα θεμάτων

224. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=x^2$ και $g(x)=\lambda x+(1-\lambda)$, $x\in\mathbb{R}$ και λ παράμετρος με $\lambda\neq 0$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

β) Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό;

γ) Αν $\lambda \neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g, να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει: $(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2$.

225. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = |x| - 2$.

γ) Για $x \in A$, να λύσετε την εξίσωση: $(f(x) + 2)^2 - 4f(x) - 5 = 0$

226. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2 - 4x + \alpha$ και $g(x) = \alpha x - 5$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Αν ισχύει $f(2) = g(2)$, να βρείτε την τιμή του α.

β) Για $\alpha = 1$,

i) να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = g(x)$

ii) να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση: $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$

227. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{x^2 - x + \dfrac{\alpha}{4}}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f να είναι το σύνολο $\mathbb{R}$.

β) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \dfrac{1}{2}$.

228. Δίνεται η συνάρτηση g, με $g(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + \mu}{x + 1}$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$,

α) να δείξετε ότι $\mu = -6$.

β) να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

γ) για $\mu = -6$ να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης.

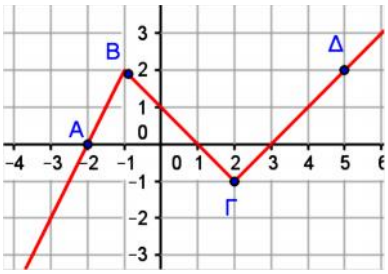
Η συνάρτηση f[x]=-x

229. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία:
α) $A(2,-1)$ και $B(4,3)$ **β)** $A(3,2)$ και $B(-5,2)$ **γ)** $A(1,3)$ και $B(1,-2)$

230. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-x+1, & x<-1\\ -2, & -1\le x<1\\ 3x-3, & x\ge 1\end{cases}$.

231. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x)=|x-3|-2|x+1|+x$

232. Η πολυγωνική γραμμή ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να βρείτε την f.



233. Αν $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^*$ και $\alpha^2+\beta^2=4$ να βρεθεί η απόσταση (ΑΒ) , όπου Α,Β τα σημεία τομής με τους άξονες της ευθείας (ε) $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$.

234. Οι τιμές των αγροτικών προϊόντων σε μία χώρα αυξήθηκαν κατά 20%, σε ένα χρόνο.
α) Να βρείτε τη σχέση που εκφράζει τις νέες τιμές y των αγροτικών προϊόντων, ως συνάρτηση των παλαιών τιμών x.
β) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης.
γ) Με την βοήθεια της προηγούμενης γραφικής παράστασης, να βρείτε
ι) την σημερινή τιμή ενός προϊόντος που πέρυσι είχε 7 ευρώ και
ιι) την περσινή τιμή ενός προϊόντος που τώρα έχει 7 ευρώ.

235. Η ισοτιμία του ευρώ έναντι του δολαρίου την 21/07/03 ήταν 112$ για 100 ευρώ.
α) Να βρείτε τη σχέση που εκφράζει τη τιμή y σε δολάρια ενός προϊόντος ως συνάρτηση της τιμής x του προϊόντος αυτού σε ευρώ.
β) Να σχεδιάσετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση και με τη βοήθεια της να βρείτε κατά προσέγγιση τη τιμή σε δολάρια ενός αεροπορικού εισιτηρίου που κοστίζει 250 ευρώ καθώς και τη τιμή σε ευρώ ενός αεροπορικού εισιτηρίου κόστους 250$.

236. Η ταχύτητα (σε m/s) ενός αεροπλάνου που προσγειώνεται, από τη στιγμή που αγγίζει το έδαφος μέχρι να σταματήσει, δίνεται από τη σχέση υ= 45 -1,5t, όπου t ο χρόνος που πέρασε από τη χρονική στιγμή που το αεροπλάνο άγγιξε το έδαφος.

α) Να βρεθεί η ταχύτητα του τη στιγμή που αγγίζει το έδαφος.
β) Να βρεθεί ο χρόνος που απαιτείται για να σταματήσει το αεροπλάνο και
γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου.

Τράπεζα θεμάτων

237. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, με $f(x)=x^2-2x$ και $g(x)=3x-4$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g.

γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y=\alpha$, $\alpha<-1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f.

238. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\begin{cases}-x+2, & \alpha\nu\ x<0\\ x+2, & \alpha\nu\ x\geq 0\end{cases}$.

α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα y'y.

β) i) Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y=3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους.

ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) i) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η ευθεία $y=\alpha$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii) Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (γi), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=\alpha$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

239. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα x΄x.

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.

γ) Έστω M(x , y) σημείο της C_f. Αν για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει: $|2x-1|<3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.

Ακολουθίες

Ένας άνθρωπος έβαλε ένα ζευγάρι κουνέλια σε ένα συγκεκριμένο μέρος, περιφραγμένο με τοίχο. Πόσα ζευγάρια κουνέλια θα παραχθούν από αυτό το ζευγάρι σε ένα χρόνο, εάν, η φύση αυτών των κουνελιών είναι τέτοια ώστε κάθε μήνα το κάθε ζευγάρι γεννά ένα νέο ζευγάρι το οποίο γίνεται παραγωγικό μετά τον δεύτερο μήνα;

1.Πόσα ζευγάρια κουνέλια υπάρχουν αρχικά;……..

2.Πόσα ζευγάρια κουνέλια θα υπάρχουν μετά τον δεύτερο μήνα;……

3.Πόσα μετά τον τρίτο μήνα;……...

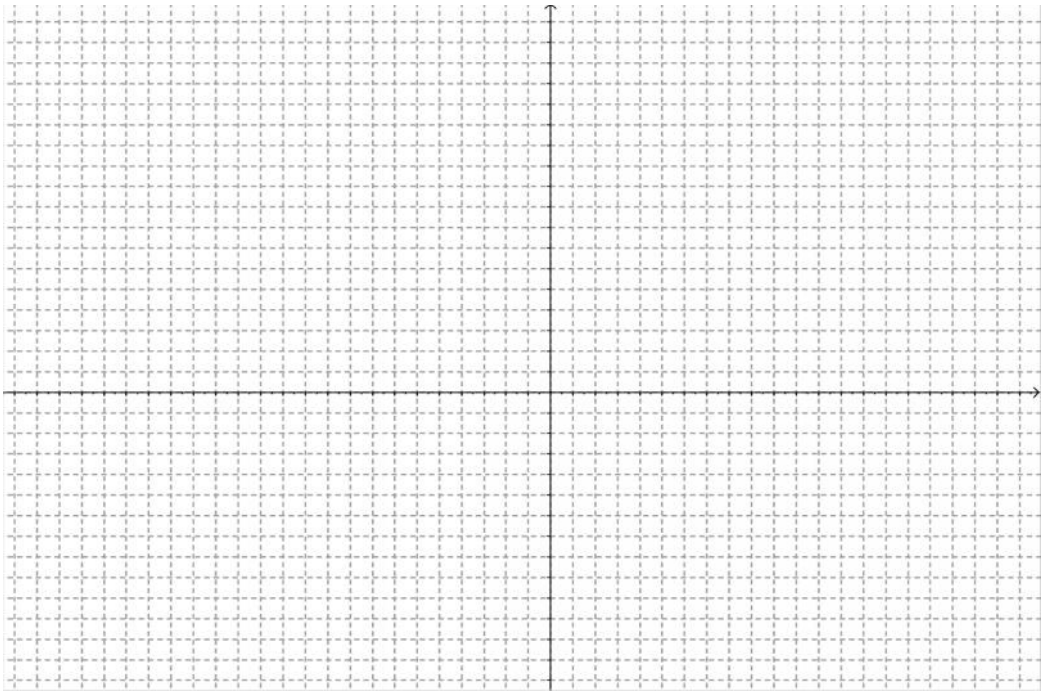
4.Αν με α_v συμβολίσουμε τον αριθμό των ζευγαριών που υπάρχουν μετά τον ν-οστό μήνα, μπορείτε να βρείτε τον αναδρομικό τύπο της ακολουθίας;……...

Αυτό το πρόβλημα εμφανίζεται σε ένα διάσημο βιβλίο μαθηματικών το οποίο γράφτηκε το 1202 και για 250 χρόνια αποτέλεσε το σχολικό βιβλίο στα Λατινικά σχολεία της Ευρώπης. Πρόκειται για το ***Liber Abaci*,** (το βιβλίο του Άβακα), το οποίο

έγραψε ο **Fibonacci** παρατσούκλι του Leonardodi Pisa (**LeonardoPisano**) (1170 – 1250), ενός διάσημου Ιταλού μαθηματικού και στο οποίο παρουσιάζει την αριθμητική και την άλγεβρα που είχε μάθει στα ταξίδια του. Στο πρώτο μέρος του βιβλίου, εισήγαγε το **Ινδο-Αραβικό** θεσιακό σύστημα αρίθμησης . Το δεύτερο μέρος του βιβλίου περιείχε μια μεγάλη συλλογή προβλημάτων που αφορούσαν στους εμπόρους, σχετικά με τη τιμή των αγαθών, τον υπολογισμό του κέρδους, τη μετατροπή διαφορετικών νομισμάτων που χρησιμοποιούνταν στο εμπόριο, σε πόλεις της Μεσογείου. Στο τρίτο μέρος εμφανίζονταν διάφορα προβλήματα (μεταξύ των οποίων και το πρόβλημα με τα κουνέλια) καθώς και προβλήματα με αθροίσματα αριθμητικών και γεωμετρικών προόδων.

5. Υπολογίστε τους εννέα πρώτους όρους της ακολουθίας **Fibonacci**……
……..

6. Υπολογίστε και τους λόγους των διαδοχικών όρων α_2 / α_1 , α_3/α_2, α_4/α_3, …
και στη συνέχεια συμπληρώστε το παρακάτω διάγραμμα (στον οριζόντιο άξονα θεωρήστε τους α_1, α_2, … και στον κατακόρυφο τους α_2 / α_1 , α_3/α_2, α_4/α_3, …
Τι παρατηρείτε;……



Η πρώτη πρόταση του βιβλίου του *Liber Abaci*ήταν:
«Υπάρχουν εννέα σύμβολα των Ινδών 1,2,3,4,5,6,7,8,9. Με αυτά τα σύμβολα μαζί με το 0 το οποίο στα αραβικά λέγεται *zephirum* μπορεί να γραφεί κάθε αριθμός, όπως θα δείξουμε παρακάτω» Είναι η πρώτη φορά που ένας Ευρωπαίος μαθηματικός περιγράφει το μηδέν. Παρόλο που η έννοια του μηδενός δημιουργήθηκε αιώνες πριν στην Ινδία και στη Μέση Ανατολή, ήταν σχετικά άγνωστη στην Ευρώπη, την εποχή του Fibonacci.
Παρόλη την ευκολία του Ινδο-Αραβικού συστήματος αρίθμησης σε σύγκριση με το Ρωμαϊκό, η υποδοχή του έγινε με καχυποψία. Το 1298, το Συμβούλιο της Φλωρεντίας, μεγάλο εμπορικό κέντρο, απαγόρευσε εντελώς τη χρήση του μηδενός. Γιατί; Επειδή μπορούσε κανείς να πλαστογραφήσει εύκολα τα ινδο-αραβικά ψηφία. Για παράδειγμα, το 10 μπορούσε να γίνει 110 ή 101 ή ακόμα και 16.
Ο Fibonacci είχε στο ίδιο βιβλίο και το ακόλουθο **πρόβλημα**:

Υπάρχουν τέσσερις γριές γυναίκες στο δρόμο για τη Ρώμη. Κάθε γυναίκα έχει επτά μουλάρια. Κάθε μουλάρι κουβαλά επτά σακιά. Κάθε σακί περιέχει επτά καρβέλια ψωμί. Για κάθε καρβέλι υπάρχουν επτά μαχαίρια και κάθε μαχαίρι είναι σε επτά θήκες. Γυναίκες, μουλάρια, σακιά, καρβέλια, μαχαίρια και θήκες- πόσα είναι όλα μαζί στο δρόμο για τη Ρώμη;
Προσπαθήστε να το λύσετε σε επόμενο μάθημα με την βοήθεια των προόδων.

Αριθμητική πρόοδος

Τράπεζα θεμάτων

240. Θεωρούμε την ακολουθία (α_v) των θετικών περιττών αριθμών:1, 3, 5, 7, …

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η (α_v) είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τον εκατοστό όρο της.

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των ν πρώτων περιττών θετικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους τους.

241. Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει α καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η 7η σειρά έχει 36 καθίσματα και το πλήθος των καθισμάτων του σταδίου είναι 300.

α) Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

β) Πόσα καθίσματα έχει κάθε σειρά;

242. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

α) Να δείξετε ότι: $\dfrac{\alpha_{15}-\alpha_9}{\alpha_{10}-\alpha_7}=2$

β) Αν $\alpha_{15}-\alpha_9=18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

243. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_{20}-\alpha_{10}=10\omega$.

β) Αν $\alpha_{20}-\alpha_{10}=30$ και $\alpha_1=1$, να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu=3\nu-2$.

γ) Ποιος είναι ο πρώτος όρος της προόδου που ξεπερνάει το 30;

δ) Πόσοι όροι της παραπάνω προόδου είναι μικρότεροι του 60;

244. Οι αριθμοί : $x^2+5,\ x^2+x,\ 2x+4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x.

β) Αν $x=3$ και ο αριθμός x^2+5 είναι ο 4ος όρος της προόδου, να βρείτε:

i) Τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

ii) Τον πρώτο όρο της προόδου.

iii) Το άθροισμα $S=\alpha_{15}+\alpha_{16}+\alpha_{17}+\ldots+\alpha_{24}$.

245. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν), ο 3ος όρος είναι $\alpha_3=8$ και ο 8ος όρος είναι $\alpha_8=23$.

α) Να αποδείξετε ότι ο 1ος όρος της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_1=2$ και η διαφορά της $\omega=3$.

β) Να υπολογίσετε τον 31ο όρο της.

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $S=(\alpha_1+1)+(\alpha_2+2)+(\alpha_3+3)\ +\ \ldots+\ (\alpha_{31}+31)$

246. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_3=10$ και $\alpha_{20}=61$.

α) Να βρεθεί ο πρώτος όρος και η διαφορά της προόδου.

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου.

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου (α_ν), τέτοιοι ώστε να ισχύει: $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}$

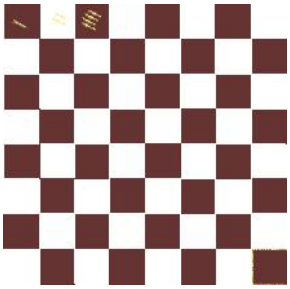
Γεωμετρική πρόοδος

ΕΝΑ ΑΠΌ ΤΑ ΑΚΡΙΒΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ας υποθέσουμε ότι μπορούσατε να διαλέξετε ανάμεσα σε 3.000.000 και σε μερικά λεπτά. Τι θα προτιμούσατε; Στη πραγματικότητα, τα λεπτά είναι τοποθετημένα πάνω σε μια σκακιέρα, με ένα συγκεκριμένο τρόπο. Υπάρχει ένα λεπτό στο πρώτο τετράγωνο, δύο λεπτά στο δεύτερο τετράγωνο, τέσσερα λεπτά στο τρίτο, οκτώ στο τέταρτο κ.ο.κ. Τι θα προτιμούσατε;

Αυτό το πρόβλημα (σύμφωνα με έναν αραβικό μύθο) είναι παρόμοιο με αυτό που ο ινδός μυθικός εφευρέτης του σκακιού ο Sissa Ben Dahir, έθεσε στον βασιλιά του, τον 2^0 ή 3^0 μ.Χ. αι. στην Ινδία. Όταν ο βασιλιάς της Ινδίας Sirhan έμαθε ότι ότι ο Sissa είχε εφεύρει ένα τέτοιο θαυμαστό παιχνίδι, θέλησε να τον ανταμείψει. Τον ρώτησε τι ήθελε και ο Sissa απάντησε ότι ήθελε κόκκους σταριού (ή ρυζιού κατά άλλη εκδοχή) σε μία πλάκα σκακιού, τοποθετημένους με τον τρόπο που περιγράψαμε προηγουμένως με τα λεπτά. Ο βασιλιάς τον ρώτησε αν ήθελε κάτι περισσότερο αλλά ο Sissa επέμενε να καλυφθεί η πλάκα του σκακιού με τους κόκους του σταριού.

Ο Sissa επέλεξε το στάρι αντί για κοσμήματα ή χρυσό. Εξηγείστε γιατί το μάθημα του στον βασιλιά, ήταν από τα ακριβότερα μαθήματα μαθηματικών στην ιστορία.



……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

Επέκταση

Η καλύτερη συμφωνία της ιστορίας

Ο Ολλανδός εξερευνητής Peter Minuet ‘αγόρασε’ το νησί Μανχάταν, το 1624, από μια ομάδα ιθαγενών Αμερικανών για μερικές χάντρες και ψευτοκοσμήματα αξίας 24$. Φαίνεται ότι αυτή ήταν μία από τις καλύτερες συμφωνίες στην ιστορία. Ας υποθέσουμε όμως ότι οι ιθαγενείς Αμερικάνοι είχαν επενδύσει αυτό το ποσό με επιτόκιο 8 % αυξανόμενο ημερησίως (ανατοκιζόμενο ημερησίως). Τι θα προτιμούσατε να έχετε; Το Μανχάταν με τα κτίρια του ή τα χρήματα της επένδυσης των 24$;

……
……
……
……
……
……
……
……
……

2ο πρόβλημα: Είναι πρόβλημα **ανατοκισμού** Ο υπολογισμός μπορεί να γίνει με τη βοήθεια του τύπου (αξία έχει μόνο αν παράξουν μόνοι τους τον τύπο)

$A = p\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$, όπου το Α αντιπροσωπεύει την συνολική αξία της επένδυσης μετά από t χρόνια (άρα το t βρίσκεται αφαιρώντας από το τρέχον έτος, το έτος 1624), το *p* αντιπροσωπεύει το ποσό που επενδύθηκε ($ 24), το *r* είναι το επιτόκιο (8 %) και το *n* είναι ο αριθμός των φορών που το κεφάλαιο ανατοκίζεται (επειδή λέει ανατοκίζεται ημερησίως το n είναι 365). Αν λοιπόν είχε γίνε η επένδυση με αυτόν τον τρόπο σήμερα θα ήταν πάνω από $ 235 τρισεκατομμύρια, τα οποία θα αρκούσαν να αγοραστεί ξανά το Μανχάταν και τα κτίρια του.

Ασκήσεις

247. Δίνεται η εξίσωση: $2x^2-5\beta x+2\beta^2=0$ (1) , με παράμετρο β >0.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1=2\beta$ και $x_2=\frac{\beta}{2}$

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2 , με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

248. Οι αριθμοί $\kappa-2$, 2κ και $7\kappa+4$, $\kappa\in\mathbb{N}$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_v).

α) Να αποδείξετε ότι $\kappa=4$ και να βρείτε το λόγο λ της προόδου.

β) i) Να εκφράσετε το 2ο όρο, τον 5ο και τον 4ο όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του α_1.

ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha_2+\alpha_5=4(\alpha_1+\alpha_4)$.

249. Δίνονται οι αριθμοί $2,\ x,\ 8$ με $x>0$.

α) Να βρείτε την τιμή του x ώστε οι αριθμοί $2,\ x,\ 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου;

β) Να βρείτε τώρα την τιμή του x ώστε οι αριθμοί $2,\ x,\ 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου;

γ) Αν (α_ν) είναι η αριθμητική πρόοδος 2, 5, 8, 11, … και (β_ν) είναι η γεωμετρική πρόοδος 2, 4, 8, 16, … τότε:

i) Να βρείτε το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν).

ii) Να βρείτε την τιμή του ν ώστε, για το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν) να ισχύει: $2\left(S_\nu+24\right)=\beta_7$

250. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

$\alpha_3=4$, $\alpha_5=16$ και $\lambda>0$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και το λόγο λ της προόδου.

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν), με $\beta_\nu=\dfrac{1}{\alpha_\nu}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν).

γ) Αν S_{10} και S'_{10} είναι τα αθροίσματα των 10 πρώτων όρων των προόδων (α_ν) και (β_ν) αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση: $S'_{10}=\dfrac{1}{2^9}S_{10}$

251. Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες;

β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3200, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με β_ν το πλήθος των βακτηρίων *ν* ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης ($\nu\le 5$).

i) Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος, και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της.

ii) Να εκφράσετε το πλήθος β_ν των βακτηρίων συναρτήσει του *ν*.

iii) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης;

Γενικές Ασκήσεις

252. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)$ για τις διάφορες τιμές του x.

β) Να προσδιορίσετε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου: $f(2,999) \cdot f(-1,002)$

γ) Αν $-3 < \alpha < 3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού: $-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$.

253. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε :

i) να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$

ii) να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς

$$f(x_2), f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), f(x_2 + 1)$$

254. Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + \kappa x - 4$, με παράμετρο $\kappa \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του κ, το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου και α, β δυο πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου: $\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

255. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$, με $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

γ) Αν $3 < \lambda < 12$, τότε:

(i) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες.

(ii) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

256. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|3x^2-x+1|-2|x^2+2|+1$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^2-x-2,\ x\in\mathbb{R}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $f(x)\le 10$.

δ) να λύσετε την εξίσωση $f^2(x)-2f(x)-8=0$.

257. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{|x-2|-x}{x^2-2x+\lambda}$

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ, για τις οποίες η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

β) Αν $\lambda=2$, τότε:

i) Να λύσετε την ανίσωση $|x-f(2)|<f(0)$

ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2+9f(0)\ge 6\alpha$

iii) Να λύσετε την εξίσωση $|2|x|-f(0)|=3$.

γ) Αν (α_ν) γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_1=\dfrac{3}{625}$ και $\alpha_6=15$,να βρείτε:

i) το λόγο λ της προόδου

ii) Αν υπάρχει τιμή της συνάρτησης που να είναι ίση με τον α_4.

258. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{3}{x+2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να λύσετε την εξίσωση $|f(x-2)|=2|f(x+1)|$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\left(\dfrac{3}{f(x)}\right)^2+x>0$.

δ) Να αποδείξετε ότι

i) $f(-1)=3$ **ii)** $\dfrac{1}{\left(2-\sqrt{f(-1)}\right)^2}-\dfrac{1}{\left(2+\sqrt{f(-1)}\right)^2}=8\sqrt{3}$

259. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x-1)+f(2x)-3f(2)=-5$.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $|f(x)-x^2|=2|x-1|-3$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>x-4f(1)$.

δ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον άξονα χ΄χ.

ε) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\sqrt{f(2)}}{\sqrt{f(2)+2}-\sqrt{f(2)}}+\dfrac{\sqrt{f(2)+2}}{\sqrt{f(2)+2}+\sqrt{f(2)}}=4$.

260. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-\lambda x+\lambda-1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ.

β) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$. Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε $|x_1-x_2|=4$.

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε $\left|x_1^2x_2+x_1x_2^2\right|<2$.

δ) Για $\lambda=3$ να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες αληθεύει η σχέση $2\le f(x)\le 6$.

261. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{x^3-16x}{x^2+4x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να απλοποιήσετε τον τύπο της.

β) Να μετατρέψετε το κλάσμα $A=\dfrac{f(5)}{\sqrt{f(8)}-\sqrt{f(7)}}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $(f(3))^{2016}\cdot x^2+\sqrt[3]{f(31)}\cdot x-10\le 0$.

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

262. Έστω $A=\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^4+6x^2+9}+\sqrt{x^2-2x+1}-\left|-x^2-2\right|$.

α) Αν $1<x<2$, να δείξετε ότι $A=2$.

Έστω $x=1,3$.

β) Να δείξετε ότι: $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{A}}-\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{3}+\sqrt{A}}=5$

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\alpha=\sqrt{A}+\sqrt{3A}$ και $\beta=\sqrt{3}+A$.

δ) Να δείξετε ότι $\sqrt[3]{A+3}\cdot\sqrt{A+1}\cdot\sqrt[6]{A+3}=\sqrt{15}$

ε) $\sqrt[4]{A}\cdot\sqrt{A}\cdot\sqrt[4]{A\sqrt{A}}=2\sqrt[8]{2}$

263. Έστω οι πραγματικοί αριθμοί α,β,λ, x με $\alpha=x^2+\left(\lambda^2-9\right)x+\lambda+2$ και $\beta=x^2+(\lambda+1)x+\lambda^2-8$.

α) Αν η εξίσωση $\beta=0$ έχει ρίζες αντίστροφες, να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha=0$ έχει ρίζες αντίθετες.

Έστω $\lambda=-3$

β) Να λύσετε την ανίσωση $\left||\alpha+1|-|\beta|\right|<1$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\alpha^2=x^2+5$

δ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς α και β.

264. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+2\alpha x+\beta$ για την οποία ισχύει ότι $f(\alpha)+f(\beta)+2\beta=2\alpha^2-\beta^2-4$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=-2$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{f(x)+6}=2x-4$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le f(-1)$.

δ) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες $f(x)>\lambda$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

265. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x+1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να αποδείξετε ότι $\sqrt[5]{f^2(29)+\sqrt[4]{f(168)+\sqrt[3]{f^2(26)}}}=2$

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση $A=\sqrt{3+2f(1)}-\sqrt{3-2f(1)}$

δ) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες $f^4(x)<3+x$.

ε) Να λύσετε την εξίσωση $x^2+2\lambda f^2(x)=2\lambda-\lambda^2$, όπου λ πραγματικός αριθμός.

266. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2(\lambda+2)x+2\lambda^2-2,\ \lambda>0$

α) Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζα το 2, τότε:

i. Να βρείτε το λ **ii.** Να βρείτε την άλλη ρίζα της εξίσωσης

β) Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες άνισες x_1,x_2, να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{8}$.

γ) Αν $\lambda=1$, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α,β για τους οποίους ισχύει ότι $f(\alpha)+f(\beta)+18=0$

δ) Να δείξετε ότι $f(x)>\lambda-15$ για κάθε τιμή του x.

267. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|x+1|+|x-1|$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(-x)=f(x)$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού x.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f^5(x)-32=0$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\left(f(x)+f(-x)\right)^2=16x^2$

δ) Να δείξετε ότι $\left(\sqrt{f(4)}-\sqrt{f(9)}\right)\left(\sqrt{f(25)}+\sqrt{f(36)}-\sqrt{f(16)}\right)=-14$.

ε) Να λύσετε την εξίσωση $f(x-1)=f(x+1)$.

Γεωμετρία

3ο Κεφάλαιο: Τρίγωνα

Κριτήρια ισότητας τριγώνων

1ο κριτήριο: Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

2ο κριτήριο: Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

3ο κριτήριο: Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν:
- Δύο ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.
- Μία πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία.

Ισοσκελές τρίγωνο

Ένα τρίγωνο λέγεται ισοσκελές όταν έχει δύο πλευρές του ίσες.
Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ισχύουν τα εξής:
- Οι γωνίες που αντιστοιχούν στη βάση του είναι ίσες.
- Το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του είναι διχοτόμος και διάμεσος του τριγώνου.

1. Από εξωτερικό σημείο Σ κύκλου (Κ, ρ) θεωρούμε τις τέμνουσες ΣΑΒ και ΣΓΔ του κύκλου για τις οποίες ισχύει ότι $\Sigma B = \Sigma \Delta$.Τα ΚΛ και ΚΜ είναι αποστήματα των χορδών ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα ΚΒΣ και ΚΔΣ είναι ίσα. **ii.** $K\Lambda = KM$.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί οι χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι ίσες.

2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ. Αν $EH \perp B\Gamma$ και $\Delta Z \perp B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ είναι ίσα. **β)** $EH = \Delta Z$

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$.Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών Β και Γ τέμνονται στο σημείο Μ και Κ,Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές με $MB = M\Gamma$ **β)** $MK = M\Lambda$

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^{\circ}\right)$ και ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας Β.

Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ και έστω Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ (προς το Α). Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = BE$ **β)** Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΒ είναι ίσα.

5. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ, παίρνουμε τα τμήματα $A\Delta = AB$ και $AE = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα.

β) Η προέκταση της διαμέσου ΑΜ προς τη κορυφή Α διχοτομεί την πλευρά ΔΕ του τριγώνου ΔΑΕ.

6. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ (προς το Α) θεωρούμε τα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $A\Delta = AE$. Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = \Gamma\Delta$ **β)** $B\Delta = \Gamma E$ **γ)** $\Delta\hat{B}\Gamma = E\hat{\Gamma}B$

7. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(AB = A\Gamma\right)$ και στις ίσες πλευρές ΑΒ, ΑΓ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $A\Delta = \frac{1}{3}AB$ και $AE = \frac{1}{3}A\Gamma$. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα.

β) τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ είναι ίσα.

γ) το τρίγωνο ΔΕΜ είναι ισοσκελές.

8. Δίνεται γωνία xOy και η διχοτόμος της Οδ. Θεωρούμε σημείο Μ της Οδ και σημεία Α και Β στις ημιευθείες Οχ και Οy αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $OA = OB$. Να αποδείξετε ότι:

α) $MA = MB$

β) Η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΜΒ.

9. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν ΑΕ κάθετο στην ΟΓ, ΓΔ κάθετο στην ΑΟ και Ζ το σημείο τομής των ΑΕ, ΓΔ, να δείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΔΟΕ είναι ισοσκελές.

β) Η ΟΖ διχοτομεί τη γωνία ΑΟΓ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου ΑΓ.

10. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(AB = A\Gamma\right)$. Στα σημεία Β και Γ της ΒΓ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της ΒΓ τα τμήματα $B\Delta \perp B\Gamma$ και $\Gamma E \perp B\Gamma$ τέτοια, ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Αν Μ το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα. **β)** $A\Delta = AE$.

11. Σε τρίγωνο ΑΒΓ η κάθετη από το μέσο Μ της ΒΓ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου ΑΔ στο σημείο Ε. Αν Θ,Ζ είναι οι προβολές του Ε στις ΑΒ,ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές.
β) Τα τρίγωνα ΘΒΕ και ΖΓΕ είναι ίσα.
γ) $A\hat{\Gamma}E + A\hat{B}E = 180^\circ$.

12. Δίνεται οξεία γωνία xOψ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (O,ρ_1) και (O,ρ_2) με $\rho_1 < \rho_2$, που τέμνουν την Ox στα σημεία Κ,Α και την Oψ στα Λ,Β αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) $A\Lambda = BK$
β) Το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ισοσκελές, όπου Ρ το σημείο τομής των ΑΛ, ΒΚ.
γ) Η ΟΡ διχοτομεί τη γωνία $x\hat{O}\psi$.

13. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$. Στην προέκταση της ΑΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε ΑΕ=ΑΓ. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε $A\Delta = AB$. Αν τα τμήματα ΔΕ και ΒΓ τέμνονται στο Κ και η προέκταση της ΑΚ τέμνει την ΕΓ στο Μ, να αποδείξετε ότι:
α) $B\Gamma = \Delta E$
β) $BK = K\Delta$
γ) Η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας Α.
δ) Η ΑΜ είναι μεσοκάθετος της ΕΓ.

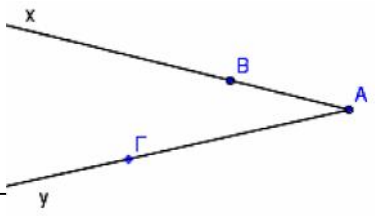
Βασικοί γεωμετρικοί τόποι

Κύκλος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που έχουν την ιδιότητα να απέχουν μια ορισμένη απόσταση από ένα σταθερό σημείο.
Μεσοκάθετος τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.
Διχοτόμος γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.

14. Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $BA = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:
α) $B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Gamma}A$
β) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές.
γ) Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ.

15. Δίνεται γωνία xAy και η διχοτόμος της Aδ. Από τυχαίο σημείο Β της Ax φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο, η οποία τέμνει την Aδ στο Δ και την Ay στο Γ. Να αποδείξετε ότι:
α) $AB = A\Gamma$
β) Το τυχαίο σημείο Ε της Aδ ισαπέχει από τα Β και Γ.

16. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το χάρτη μιας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες Ax και Ay παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία Β και Γ βρίσκονται δύο πλατάνια. Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές

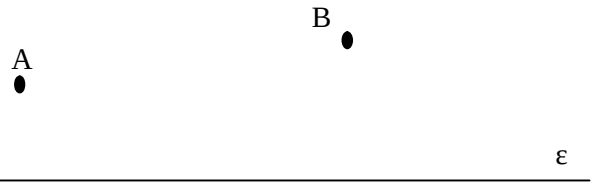


θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:
α) ισαπέχει από τα δύο πλατάνια.
β) ισαπέχει από τα δύο ποτάμια.
γ) ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια.

ΕΛΑΧΙΣΤΕΣ ΔΙΑΔΡΟΜΕΣ

Ο **Ήρων από την Αλεξάνδρεια** (65 – 125 μ.Χ) ήταν μαθηματικός και εφευρέτης. Η αιολόσφαιρα που κατασκεύασε ήταν η πρώτη επιτυχημένη ατμομηχανή Στο βιβλίο του ***Πνευματικά*** περιέγραψε περισσότερες από 100 μηχανές βασισμένες στον ατμό, τον αέρα ή το νερό. Εφηύρε επίσης αυτόματα μηχανήματα πώλησης -με τέσσερις δραχμές μπορούσε κανείς να αγοράσει άγιο νερό - και μια φορητή συσκευή που διασφάλιζε ότι κανείς άλλος δεν θα έπινε από το κρασί που εσύ ο ίδιος είχες φέρει σε μια φιλική συγκέντρωση. Υπήρξε διευθυντής της περίφημης Ανώτατης Τεχνικής Σχολής της Αλεξάνδρειας (κάτι σαν το πρώτο πολυτεχνείο) και δίδασκε Μαθηματικά, Φυσική και Μηχανική.
Στο βιβλίο του ***Μηχανικά*** περιγράφονται πέντε βασικά τεχνικά εργαλεία: βαρούλκο, μοχλός, πολύσπαστο (τροχαλίες), σφήνα, ατέρμων κοχλίας.

Μία από τις ανακαλύψεις του αφορούσε τις **ελάχιστες διαδρομές**, δηλαδή την μικρότερη διαδρομή μεταξύ τριών ή περισσοτέρων σημείων. Ας δούμε το παρακάτω πρόβλημα, το οποίο εμφανίζεται στα ***Κατοπτρικά:***
Υποθέτουμε ότι τα Α και Β είναι δύο νέα σπίτια στον δρόμο ε. Θέλουμε να τοποθετήσουμε μια τηλεφωνική κεραία (Τ) σε σημείο του δρόμου ώστε η διαδρομή (απόσταση) από το Α στο Τ και μετά στο Β να είναι η ελάχιστη δυνατή.



……
……
……
……
……
……
……
……
……

……
……
……

Το μεγαλύτερο έργο του Ήρωνα ήταν τα ***Μετρικά.*** Όπως για πολλά έργα άλλων Ελλήνων μαθηματικών έγινε γνωστό από αναφορές σε αυτό από μετέπειτα μαθηματικούς. Ωστόσο, το 1896 βρέθηκε στην Κωνσταντινούπολη, ένα αντίγραφο των *Μετρικών*, του $11^{ου}$ ή $12^{ου}$ αι. Τα τρία βιβλία των Μετρικών αφορούν εμβαδά πολυγώνων, όγκους και εμβαδά επιφανειών στερεών. Εμφανίζεται επίσης ο τύπος του Ήρωνα για τον υπολογισμό εμβαδού τριγώνου, αν γνωρίζουμε τα μήκη των τριών πλευρών $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$, όπου α,β,γ τα μήκη των πλευρών και τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

Ανισοτικές σχέσεις

1. Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.
2. Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μια γωνία ορθή ή αμβλεία.
3. Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα.
4. Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους (τριγωνική ανισότητα).
5. Αν δύο πλάγια τμήματα είναι ίσα, τότε τα ίχνη τους ισαπέχουν από το ίχνος της καθέτου και αντιστρόφως.
6. Από σημείο εκτός ευθεία φέρουμε το κάθετο και δύο πλάγια τμήματα.
   α) Το κάθετο τμήμα είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο.
   β) Αν τα δύο πλάγια τμήματα είναι άνισα, τότε και οι αποστάσεις των ιχνών τους από το ίχνος της κάθετης είναι ομοιοτρόπως άνισες και αντίστροφα.

17. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^{\circ}\right)$ η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ. Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά ΒΓ την κάθετο ΔΕ, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) $A\Delta = \Delta E$ **β)** $A\Delta < \Delta B$

18. Έστω ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και το Ε είναι σημείο στην προέκταση της ΑΔ, ώστε $\Delta E = A\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = \Gamma E$ **β)** $A\Delta < \dfrac{AB+A\Gamma}{2}$

19. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ορθή τη γωνία Α και $\hat{B} > \hat{\Gamma}$. Έστω ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας Β και ΔΕ κάθετη στην ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) $A\Delta = \Delta E$ **β)** $A\Delta < \Delta\Gamma$ **γ)** $A\Gamma > AB$

20. Θεωρούμε δύο σημεία Α και Β τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία ε, τέτοια ώστε η ευθεία ΑΒ δεν είναι κάθετη στην ε. Έστω A' το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ε.

α) Αν η BA' τέμνει την ευθεία ε στο σημείο Ο, να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία ε διχοτομεί τη γωνία $A\hat{O}A'$.

ii. Οι ημιευθείες ΟΑ και ΟΒ σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία ε.

β) Αν Κ είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία ε, να αποδείξετε ότι:

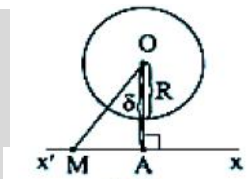
i. $KA = KA'$ **ii.** $KA + KB > AO + OB$

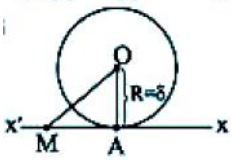
Σχετική θέση ευθείας και κύκλου- Εφαπτόμενα τμήματα Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

Θεωρούμε έναν κύκλο (Ο,R) μια ευθεία x'x και την απόσταση δ = ΟΑ του κέντρου Ο από την x'x.

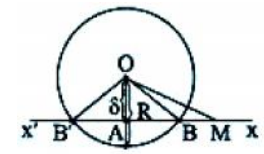
Αν $\delta > R$, τότε η x'x δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται εξωτερική ευθεία του κύκλου.

Αν $\delta = R$, τότε η x'x έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Το σημείο Α λέγεται σημείο επαφής της ευθείας με τον κύκλο.





Αν $\delta < R$, τότε η x'x έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο. Στην περίπτωση αυτή η ευθεία x'x, λέγεται τέμνουσα του κύκλου και τα κοινά της σημεία με το κύκλο λέγονται σημεία τομής της με τον κύκλο.



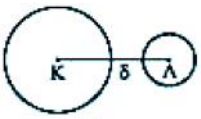
Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.

Η διακεντρική ευθεία:
(i) είναι μεσοκάθετος της χορδής του κύκλου με άκρα τα σημεία επαφής,
(ii) διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων και τη γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής.

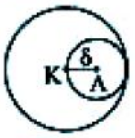
Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα δύο κύκλων λέγεται διάκεντρος των δύο κύκλων και συμβολίζεται με δ.

Θεωρούμε δύο κύκλους (Κ, R) και (Λ, ρ) με R > ρ.
Ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του (Κ, R), αν και μόνο αν $\delta < R - \rho$.

Οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) βρίσκεται ο ένας στο εξωτερικό του άλλου, αν και μόνο αν $\delta > R + \rho$.



Οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά, δηλαδή έχουν ένα κοινό σημείο και ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του (Κ, R), αν και μόνο αν $\delta = R - \rho$.

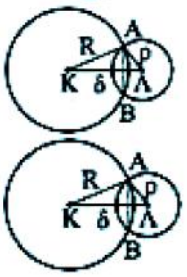


Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, δηλαδή έχουν ένα κοινό σημείο και ο ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου, αν και μόνο αν $\delta = R + \rho$. Το κοινό σημείο δύο εφαπτόμενων κύκλων λέγεται σημείο επαφής και είναι σημείο της διακέντρου.

Οι κύκλοι τέμνονται, δηλαδή έχουν δύο κοινά σημεία, αν και μόνο αν $R - \rho$.

Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που ενώνει τα κοινά σημεία λέγεται κοινή χορδή των δύο κύκλων.

Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.



21. Από εξωτερικό σημείο Ρ ενός κύκλου (Ο, ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Αν Μ είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΟΡ, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΡΑΜ και ΡΜΒ είναι ίσα. **β)** $M\hat{A}O = M\hat{B}O$.

22. Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο Ο και ακτίνες ρ και R ($\rho < R$). Οι χορδές ΔΓ και ΖΕ του κύκλου (Ο,R) εφάπτονται στον κύκλο (Ο, ρ) στα σημεία Α και Β αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta\Gamma = ZE$

β) Αν οι ΔΓ και ΖΕ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο Κ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΕΓ είναι ισοσκελές.

23. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Από σημείο εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΒ και ΑΓ. Τα σημεία Ε και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των Β και Γ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι ίσα.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.

24. Έστω ότι ο κύκλος (O,ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου ΡΓΕ στα σημεία Α,Δ και Β.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $P\Gamma = \Gamma\Delta + AP$

ii. $P\Gamma - \Gamma\Delta = PE - \Delta E$

β) Αν $A\Gamma = BE$, να αποδείξετε ότι

i. Το τρίγωνο ΡΓΕ είναι ισοσκελές.

ii. Τα σημεία Ρ, Ο και Δ είναι συνευθειακά.

4ο Κεφάλαιο: Παράλληλες ευθείες

- Δυο ευθείες ε_1 και ε_2 που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κοινό σημείο λέγονται παράλληλες ευθείες.

- Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.

- Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.

- **Αίτημα παραλληλίας: Από σημείο εκτός ευθείας άγεται μία μόνο παράλληλη προς αυτή.**

- Αν δυο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.
  Οι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες.
  Οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.

- Αν δύο διαφορετικές ευθείες $£_1$ και $£_2$ είναι παράλληλες προς μια τρίτη ευθεία ε, τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες.

- Αν μια ευθεία τέμνει μία από δύο παράλληλες ευθείες τότε θα τέμνει και την άλλη.

- Αν δυο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από 2 ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες.

- Δυο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες, μία προς μία, είναι ίσες αν είναι και οι δυο οξείες ή αμβλείες, ενώ είναι παραπληρωματικές αν η μία γωνία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία.

- Οι διχοτόμοι δυο εντός εναλλάξ γωνιών είναι παράλληλες.
  Οι διχοτόμοι δυο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών είναι κάθετες**.**

Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου

- Ο κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές ενός τριγώνου λέγεται **περιγεγραμμένος** κύκλος του. Το κέντρο του λέγεται **περίκεντρο**.
  Οι τρεις μεσοκάθετοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο το οποίο είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου.
- Ο κύκλος που βρίσκεται στο εσωτερικό ενός τριγώνου και εφάπτεται και στις τρείς πλευρές του λέγεται **εγγεγραμμένος** κύκλος του τριγώνου. Το κέντρο του λέγεται **έγκεντρο**.
  Οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο

είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται και στις τρείς πλευρές του τριγώνου.

- Οι τρείς διχοτόμοι ενός τριγώνου τέμνονται σε σημείο το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται στη μία πλευρά του τριγώνου και στις προεκτάσεις των δύο άλλων. Ο κύκλος αυτός λέγεται **παρεγγεγραμμένος** και το κέντρο του **παράκεντρο** του τριγώνου.

25. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ και μια ευθεία (ε) παράλληλη προς τη ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ είναι ίσα.

26. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ (προς το Α) και ΓΑ (προς το Α) τριγώνου ΑΒΓ, παίρνουμε τα τμήματα $A\Delta = AB$ και $AE = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα. **β)** $\Delta E \parallel B\Gamma$

27. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και η διάμεσός του ΑΜ. Φέρουμε ημιευθεία $\Gamma x \perp B\Gamma$ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα $\Gamma\Delta = AB$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\hat{A}\Gamma = \Gamma\hat{\Delta}A$

β) Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑΓ.

28. Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο και εξωτερικό σημείο του Ρ. Από το Ρ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Η διακεντρική ευθεία ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Λ. Η εφαπτομένη του κύκλου στο Λ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΡΓΔ είναι ισοσκελές.

β) $\Gamma A = \Delta B$

γ) η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ είναι ίση με $PA + PB$.

29. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$, η διχοτόμος του ΑΔ και ευθεία ε παράλληλη από το Β προς την ΑΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΔ η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ζ, την ευθεία ε στο σημείο Λ και την προέκταση της ΒΑ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΒΛΕ είναι ισοσκελή.

β) $B\Lambda = \Gamma Z$.

γ) $AE = A\Gamma - B\Lambda$.

Άθροισμα γωνιών τριγώνου

1. **Το άθροισμα γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.**

2. **Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.**

3. **Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες ίσες, μία προς μία, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.**

4. **Δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.**
   Δυο αμβλείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.
   Δυο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες αλλά η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία είναι παραπληρωματικές.

5. **Το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι $2\nu - 4$ ορθές.**

6. **Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι 4 ορθές.**

30. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ είναι $\hat{A} = 80^\circ$. Παίρνουμε τυχαίο σημείο Ε στην πλευρά ΒΓ και κατόπιν τα σημεία Δ και Ζ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta = BE$ και $\Gamma E = \Gamma Z$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΒΔΕ και ΓΖΕ.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία ΔΕΖ

31. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^\circ\right)$. Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = AB$

β) Αν επιπλέον $B\hat{\Delta}A = 55^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΓΔΕ.

32. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(AB = A\Gamma\right)$ και σημεία Δ και Ε στην ευθεία ΒΓ τέτοια, ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Έστω $\Delta Z \perp AB$ και $EH \perp A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $BZ = \Gamma H$. **ii.** Το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές.

β) Αν $\hat{A} = 50^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΖΗ.

33. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$. Έστω Αχ η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας $\hat{A}_{\varepsilon\xi} = 120^\circ$. Από την κορυφή Β φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην Αχ, η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο. **ii.** $\Delta\Gamma = A\Gamma - AB$

β) Αν η γωνία ΒΔΑ είναι διπλάσια της $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΓ.

34. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(AB = A\Gamma\right)$ με $\hat{A} = 50^\circ$. Έστω Δ σημείο της πλευράς ΑΓ, τέτοιο, ώστε $B\Delta = B\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{B}\Gamma = \hat{A}$.

35. Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^\circ\right)$ με $\hat{\Gamma}=40^\circ$. Έστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΓ και $\Delta E \perp B\Gamma$. Να υπολογίσετε:

α) τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ.

β) τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΔΕΒ.

36. Προεκτείνουμε τη βάση ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ κατά τμήματα $B\Delta = AB = A\Gamma = \Gamma E$. Αν $B\hat{A}\Gamma = 40^\circ$, να αποδείξετε ότι:

α) $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E = 110^\circ$.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα

γ) Το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισοσκελές.

37. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=80^\circ$, $\hat{B}=20^\circ+\hat{\Gamma}$ και έστω ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ.

β) Φέρνουμε από το Δ ευθεία παράλληλη στην ΑΒ, που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να υπολογίσετε τις γωνίες ΑΔΕ και ΕΔΓ.

38. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και η διάμεσός του ΑΔ τέτοια, ώστε $B\hat{A}\Delta = 30^\circ$. Θεωρούμε σημείο Ε στην ΑΓ τέτοιο, ώστε $A\Delta = AE$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία ΕΔΓ.

39. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε σημείο Ε στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) και σημείο Δ στο εσωτερικό της πλευράς ΑΓ, ώστε $AE = A\Delta$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ.

β) Αν Ζ είναι το σημείο τομής της προέκτασης της ΕΔ (προς το Δ) με την ΒΓ, να αποδείξετε ότι η ΕΖ είναι κάθετη στην ΒΓ.

40. Δύο κύκλοι (O,ρ_1), (K,ρ_2) εφάπτονται εξωτερικά στο Ν. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία Α, Β αντίστοιχα. Η κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο Ν τέμνει την (ε) στο Μ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το Μ είναι μέσον του ΑΒ. **β)** $O\widehat{M}K = 90^\circ$ **γ)** $A\hat{N}B = 90^\circ$

41. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$. Φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΚ και σε τυχαίο σημείο της Ε φέρουμε ευθεία κάθετη στη διχοτόμο ΑΚ, η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ζ και Δ αντίστοιχα και την προέκταση της ΓΒ στο σημείο Η. Να αποδείξετε ότι:

α) $Z\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ + \dfrac{\hat{A}}{2}$ **β)** $ZK = K\Delta$ **γ)** $Z\hat{H}\Gamma = \dfrac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$

42. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και Μ το μέσο της ΒΓ. Φέρνουμε $\Gamma\Delta \perp B\Gamma$ με $\Gamma\Delta = AB$ (Α,Δ εκατέρωθεν της ΒΓ). Να αποδείξετε ότι:

α) $AM \parallel \Gamma\Delta$

β) η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑΓ.

γ) $\Delta\hat{A}\Gamma = 45^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$

δ) $A\Delta < 2AB$

5ο Κεφάλαιο: Παραλληλόγραμμα - Τραπέζια

Παραλληλόγραμμα

Το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες λέγεται παραλληλόγραμμο.

- Σε κάθε παραλληλόγραμμο:
  - οι απέναντι πλευρές του και οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
  - οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

- Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του στις ευθείες των απέναντι πλευρών παραλληλογράμμου και είναι κάθετο σε αυτές λέγεται ύψος του παραλληλογράμμου.

- Αν σε ένα τετράπλευρο οι απέναντι πλευρές του είναι ανά δύο ίσες, τότε είναι παραλληλόγραμμο.

- Αν σε ένα τετράπλευρο δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες, τότε είναι παραλληλόγραμμο.

- Αν σε ένα τετράπλευρο οι απέναντι γωνίες του είναι ανά δύο ίσες, τότε είναι παραλληλόγραμμο.

- Αν σε ένα τετράπλευρο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, τότε είναι παραλληλόγραμμο.

43. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά ΒΑ και ευθύγραμμο τμήμα ΜΕ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά ΓΑ. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta A = AE$ **β)** Τα σημεία Δ, Α και Ε είναι συνευθειακά. **γ)** $\Delta E = B\Gamma$

44. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB = 2B\Gamma$ και Ε το μέσο της πλευράς ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές.

β) Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ.

45. Στις πλευρές ΑΔ και ΒΓ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θεωρούμε σημεία Ε και Ζ, τέτοια, ώστε $AE = \Gamma Z$. Αν η ευθεία ΖΕ τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Η και Θ, να αποδείξετε ότι:

α) $H\hat{B}Z = E\hat{\Delta}\Theta$ **β)** $B\hat{Z}H = \Delta\hat{E}\Theta$ **γ)** $BH = \Theta\Delta$

46. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύει $B\Gamma = 2AB$ και έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Αν η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΜ και Ε σημείο στην προέκταση της ώστε $A\Delta = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΕΜ είναι παραλληλόγραμμο. **β)** $ME = M\Gamma$.

47. Δίνονται τα παραλληλόγραμμα ΑΒΔΓ και ΒΔΕΖ που δεν έχουν κανένα κοινό εσωτερικό σημείο. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμο. **β)** $A\hat{B}Z = \Gamma\hat{\Delta}E$

48. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε κάθετες ακτίνες ΟΑ, ΟΓ και εφαπτόμενο στο κύκλο τμήμα ΑΒ με $AB = O\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΑΟ και ΒΓ διχοτομούνται.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΟΓ

49. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ θεωρούμε σημεία Ε, Ζ, Η, Θ στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα, με $AE = \Gamma H$ και $BZ = \Delta\Theta$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΕΓΗ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Τα τμήματα ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ και ΖΘ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

50. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α, για την οποία ισχύει ότι $A\Delta = \Delta\Gamma$. Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΔΒ και η ΔΖ παράλληλη στην ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα ΕΔ και ΑΓ είναι παράλληλα.

β) Το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές

γ) Τα τμήματα ΑΔ και ΕΖ διχοτομούνται.

51. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΚ διχοτόμο της γωνίας Α. Στην προέκταση της ΑΚ θεωρούμε σημείο Δ ώστε $AK = K\Delta$. Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει τις ΑΓ και ΒΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.

β) Η ΕΚ είναι μεσοκάθετος του ΑΔ.

γ) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΚΔΖ είναι ίσα.

δ) Το τετράπλευρο ΑΖΔΒ είναι παραλληλόγραμμο.

52. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α και Μ το μέσον της ΑΒ. Η κάθετη από το Μ στην ΑΔ τέμνει το ΑΓ στο Ε. Η παράλληλη από το Β στο ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Κ και την προέκταση της ΕΜ στο Λ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΜ, ΜΒΛ και ΑΒΚ είναι ισοσκελή.

β) Το τετράπλευρο ΑΛΒΕ είναι παραλληλόγραμμο.

Ορθογώνιο – Ρόμβος - Τετράγωνο

Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μία γωνία ορθή.

- Οι διαγώνιες του ορθογωνίου είναι ίσες.

- Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο όταν:

(i) Είναι παραλληλόγραμμο και έχει μία ορθή γωνία.
(ii) Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του είναι ίσες.
(iii) Έχει τρεις γωνίες ορθές.
(iv) Όλες οι γωνίες του είναι ίσες.

- Κάθε παραλληλόγραμμο του οποίου οι διαγώνιες είναι ίσες, είναι ορθογώνιο.

Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

- Σε κάθε ρόμβο οι διαγώνιες του τέμνονται κάθετα και διχοτομούν τις γωνίες του.

- Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

(i) Έχει όλες τις πλευρές του ίσες.
(ii) Είναι παραλληλόγραμμο και δυο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
(iii) Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.
(iv) Είναι παραλληλόγραμμο και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.

- Κάθε παραλληλόγραμμο του οποίου μια διαγώνιος διχοτομεί μια γωνία του, είναι ρόμβος.

Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

- Σε κάθε τετράγωνο:

(i) Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.
(ii) Όλες οι πλευρές του είναι ίσες.
(iii) Όλες οι γωνίες του είναι ορθές.
(iv) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες, τέμνονται κάθετα, διχοτομούνται και διχοτομούν τις γωνίες του.

- Ένα παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο, αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις:

(i) Μία γωνία του είναι ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
(ii) Μία γωνία του είναι ορθή και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.
(iii) Μία γωνία του είναι ορθή και οι διαγώνιοί του κάθετες.
(iv) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
(v) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και η μία διχοτομεί μία γωνία του.
(vi) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και κάθετες.

Ορθογώνιο

53. Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\Delta\hat{\Gamma}A = 30^\circ$ και Ο το κέντρο του. Φέρουμε $\Delta E \perp A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΑΔΓ χωρίζεται από τη ΔΕ και τη διαγώνιο ΔΒ σε τρείς ίσες γωνίες.

β) Φέρουμε κάθετη στην ΑΓ στο σημείο Ο η οποία τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ζ. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΖΟ και ΑΒΓ είναι ίσα.

54. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$, τυχαίο σημείο Μ της βάσης του ΒΓ και το ύψος του ΒΗ. Από το Μ φέρουμε κάθετες ΜΔ, ΜΕ και ΜΘ στις ΑΒ, ΑΓ και ΒΗ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΜΕΗΘ είναι ορθογώνιο

β) $B\Theta = \Delta M$

γ) $M\Delta + ME = BH$.

55. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και σημείο Δ στην προέκταση της ΒΓ. Από το Δ φέρουμε ΔΚ κάθετη στην ΑΒ και ΔΕ κάθετη στην προέκταση της ΑΓ. Από το σημείο Γ φέρουμε ΓΗ κάθετη στην ΑΒ και ΓΖ κάθετη στην ΚΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία ΖΓΔ είναι ίση με τη Β.

β) Η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΖΓΕ.

γ) Το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ισοσκελές.

δ) $\Delta K - \Delta E = H\Gamma$

56. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$. Φέρουμε τη διάμεσό του ΑΜ την οποία προεκτείνουμε, προς το μέρος του Μ, κατά τμήμα $M\Delta = AM$. Θεωρούμε ευθεία ΔΚ κάθετη στη ΒΓ, η οποία τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας Β στο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι ορθογώνιο.

β) $K\hat{E}B = 90^\circ - \dfrac{\hat{B}}{2}$

γ) $\Delta E = B\Delta$.

57. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και διάμετρο ΑΒ. Φέρνουμε χορδή $\Gamma\Delta \parallel AB$ και Κ το μέσο της. Από το Δ φέρνουμε το τμήμα ΔΕ κάθετο στη ΔΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΚΓΟΕ είναι παραλληλόγραμμο.

β) $\Delta\hat{E}K = \dfrac{\Delta\hat{O}\Gamma}{2}$

γ) $KE < KB$

Ρόμβος

58. Σε κύκλο κέντρου Ο, έστω ΟΑ μια ακτίνα του. Φέρουμε τη μεσοκάθετη της ΟΑ που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β και Γ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΟΒΑ είναι ισόπλευρο.

β) Το τετράπλευρο ΟΒΑΓ είναι ρόμβος.

59. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε από την κορυφή Α ευθεία (ε) παράλληλη στη ΒΓ. Η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΒ τέμνει την (ε) στο Δ και την ΒΓ στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta A = \Delta B$ και $EA = EB$.

β) Αν Μ το μέσο του ΑΒ, να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΕΜΒ.

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ρόμβος.

60. Δίνεται ρόμβος ΑΒΔΓ. Στην προέκταση της διαγωνίου ΑΔ (προς το Δ) παίρνουμε τυχαίο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) Το Ε ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ (προς το μέρος των Β και Γ αντίστοιχα).

β) Το σημείο Ε ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ.

61. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημεία Κ,Λ της διαγωνίου του ΒΔ, τέτοια, ώστε να ισχύει $BK = K\Lambda = \Lambda\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Να αποδείξετε ότι, αν το αρχικό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, τότε και το ΑΚΓΛ είναι ρόμβος.

γ) Ποια πρέπει να είναι η σχέση των διαγωνίων του αρχικού παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, ώστε το ΑΚΓΛ να είναι ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

62. Δίνεται αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$ και $\widehat{A} > 90^\circ$. Φέρνουμε τμήμα ΒΔ κάθετο στην ΑΒ και με $B\Delta = A\Gamma$ και τμήμα ΓΕ κάθετο στην ΑΓ με $\Gamma E = AB$. Θεωρούμε τα μέσα Ζ και Θ των ΑΔ και ΑΕ καθώς και τη διχοτόμο Αδ της γωνίας $\Delta\widehat{A}E$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = AE$.

β) Αν Κ τυχαίο σημείο της διχοτόμου Αδ, να αποδείξετε ότι το Κ ισαπέχει από τα μέσα Ζ και Θ.

γ) Αν το Κ είναι σημείο της διχοτόμου Αδ τέτοιο, ώστε $KZ = AZ$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΚΘ είναι ρόμβος.

Τετράγωνο

63. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο ΑΒΔΕ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές.

β) $2E\widehat{\Gamma}A = 90^\circ - B\widehat{A}\Gamma$.

64. Εκτός τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Αν Μ το μέσο του ΒΓ και Λ σημείο στην προέκταση της ΑΜ τέτοιο, ώστε $AM = M\Lambda$, να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma\Lambda = AE$

β) $A\widehat{\Gamma}\Lambda = E\widehat{A}H$.

γ) Η προέκταση της ΜΑ (προς το Α) τέμνει κάθετα την ΕΗ.

65. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Ε στην πλευρά ΔΓ. Αν η διχοτόμος της γωνίας ΕΑΒ τέμνει τη ΒΓ στο Ζ και η κάθετη ΔΗ από το Δ προς την ΑΖ τέμνει την ΑΕ στο Μ και την ΑΒ στο Ν, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΔΝ και ΑΒΖ είναι ίσα.

β) ΑΜ=ΑΝ και ΔΕ=ΕΜ.

γ) ΑΕ=ΔΕ+ΒΖ

66. Σε ορθογώνιο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^{\circ}\right)$ φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΔ. Έστω ΔΚ και ΔΡ οι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Η κάθετη της ΒΓ στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε και την προέκταση της πλευράς ΑΒ (προς το Α) στο σημείο Ζ.

α) Να αποδείξετε ότι: **i.** $\hat{B}=\Delta\hat{E}\Gamma$ **ii.** $\Delta E=\Delta B$

β) Να υπολογίσετε τη γωνία ΔΓΖ.

67. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma$ και το ύψος του ΑΜ. Φέρουμε τη ΜΔ κάθετη στην ΑΓ και θεωρούμε σημείο Η το μέσο του ΜΔ. Από το Η φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ η οποία τέμνει τις ΑΜ και ΑΓ στα σημεία Κ και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $HZ=\dfrac{B\Gamma}{4}$

β) $MZ \parallel B\Delta$

γ) Η ευθεία ΑΗ είναι κάθετη στη ΒΔ.

Εφαρμογές των παραλληλογράμμων

1) Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου, είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

2) Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς

3) Αν τρείς (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

4) Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δυο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 είναι μία ευθεία ε παράλληλη προς τις ε_1 και ε_2, η οποία διέρχεται από τα μέσα των τμημάτων που έχουν τα άκρα τους στις δυο παράλληλες. Η ευθεία ε λέγεται μεσοπαράλληλος των ε_1 και ε_2.

5) Το σημείο στο οποίο τέμνονται οι διάμεσοι ενός τριγώνου λέγεται βαρύκεντρό του.

6) Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι τα 2/3 του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

7) Οι παράλληλες που άγονται από τις κορυφές ενός τριγώνου προς τις απέναντι πλευρές του, σχηματίζουν τρίγωνο, το οποίο έχει ως μέσα των πλευρών του τις κορυφές του αρχικού τριγώνου.

8) Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Ορθογώνιο τρίγωνο

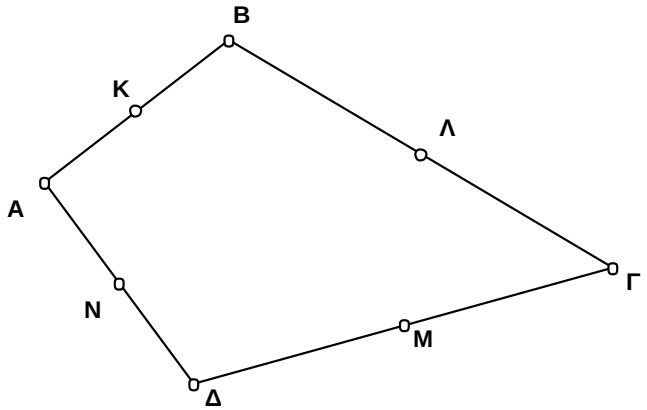
9) Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας, είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

10) Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

11) Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30°, τότε η απέναντι κάθετη πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας και αντιστρόφως.

Ο Γάλλος μαθηματικός **Pierre Varignon** (1654-1722) αν και ιερέας, κερδήθηκε από τα μαθηματικά αφού διάβασε τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη. Η κυρίως συνεισφορά του ήταν στην μηχανική και την αναλυτική δυναμική, υιοθετώντας τον λογισμό του Leibnitz (και μάλιστα υπερασπίστηκε τον λογισμό από τις επιθέσεις του Rolle, ότι είχε πολλά λάθη). Δεδομένου ότι δίδασκε σε σχολείο Ιησουιτών, έγραψε το βιβλίο, ***Στοιχεία μαθηματικών*** *(Elements de mathématiques)* το οποίο δημοσιεύθηκε το 1731, εννιά χρόνια μετά τον θάνατο του. Σε αυτό, μεταξύ άλλων, εμφανίζει και αποδεικνύει την παρακάτω γεωμετρική σχέση.

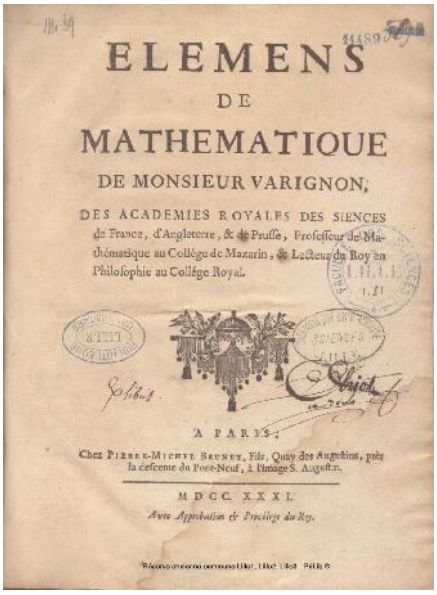
Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του. Το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο. Μπορείτε να το αποδείξετε;

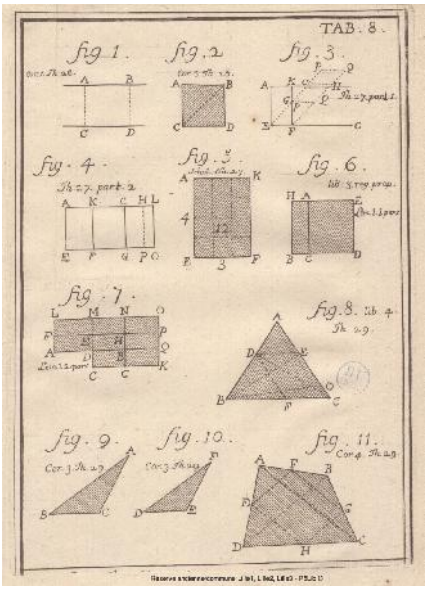


Επέκταση: Μπορείτε να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα; (Αιτιολόγηση)

Αρχικό Τετράπλευρο	**Τετράπλευρο μέσων σημείων**
Τυχαίο τετράπλευρο	Παραλληλόγραμμο
Παραλληλόγραμμο	
Ορθογώνιο	
Ρόμβος	
Τετράγωνο	
Τραπέζιο	
Ισοσκελές τραπέζιο	

Το εξώφυλλο του βιβλίου του (όπως προδημοσιεύτηκε) και το αντίστοιχο σχήμα που αφορά στη λύση του.


ELEMENS
DE
MATHEMATIQUE
DE MONSIEUR VARIGNON,
DES ACADEMIES ROYALES DES SIENCES de France, d'Angleterre, & de Prusse, Professeur de Mathématique au Collége de Mazarin, & Lecteur du Roy en Philosophie au Collége Royal.
A PARIS,
MDCC. XXXI.



Τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου

68. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και η διάμεσός του ΑΜ. Στην προέκταση της διαμέσου ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ θεωρούμε σημείο Ε ώστε $M\Delta = \Delta E$. Αν το σημείο Ζ είναι η προβολή του Δ στην ΑΜ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι ορθογώνιο **β)** $\Delta Z = \dfrac{B\Gamma}{4}$

69. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ, Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΔΒΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Η ευθεία ΔΖ διχοτομεί το τμήμα ΑΕ.

70. Στο διπλανό σχήμα ισχύουν $AB = B\Delta = A\Gamma = \Gamma E = 5$, $BK \perp A\Delta$ και $\Gamma\Lambda \perp AE$.

α) Να προσδιορίσετε ως προς τις πλευρές, το είδος των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΕ. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα.

γ) Αν η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι 12, να υπολογίσετε το τμήμα ΚΛ.

71. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με $\hat{\Gamma} = 120^\circ$. Έστω ΑΕ και ΑΖ οι αποστάσεις του σημείου Α από τις πλευρές ΓΔ και ΓΒ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΓΔ και ΓΒ αντίστοιχα.

ii. $A\Gamma \perp EZ$

β) Αν Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΜΝΖ είναι ορθογώνιο.

72. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Έστω Ε το συμμετρικό σημείο του Β ως προς το Δ και Ζ είναι το μέσο της ΑΔ. Η προέκταση της ΓΔ τέμνει την ΑΕ στο Η. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta H = \dfrac{AB}{2}$

β) Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΔΓ είναι ίσα

γ) Η ΓΖ είναι κάθετη στην ΑΕ

73. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$ και Δ, Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Αν η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει τη ΖΕ στο σημείο Μ και την προέκταση της ΔΕ στο σημείο Ν, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΖΕΔΒ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Τα τρίγωνα ΒΖΜ και ΜΕΝ είναι ισοσκελή.

γ) $BZ + NE = \Delta\Gamma$

74. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $B\Gamma = 2A\Gamma$. Έστω ΑΜ διάμεσος του ΑΒΓ και Κ,Λ τα μέσα των ΜΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $M\hat{A}\Gamma = A\hat{M}\Gamma$

β) $M\Lambda = MK$

γ) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΛΑΚ.

75. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση του ύψους του ΑΚ θεωρούμε σημείο Δ ώστε $AK = K\Delta$. Έστω Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.

β) Το τετράπλευρο ΒΛΚΝ είναι ρόμβος

γ) $\Lambda M \perp \Lambda N$

76. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο ΑΜ τέτοια, ώστε $AM = AB$. Φέρνουμε το ύψος του ΑΚ και το προεκτείνουμε (προς το Κ) κατά τμήμα $K\Delta = AK$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ (προς το Μ) κατά τμήμα $ME = M\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta E \perp A\Delta$ και $\Delta E = 2KM$

β) Το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Το τετράπλευρο ΑΒΔΜ είναι ρόμβος

δ) Η προέκταση της ΔΜ τέμνει το ΑΓ στο μέσον του Ζ.

77. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του και Κ το μέσο του ΓΔ. Προεκτείνουμε το τμήμα ΟΚ κατά τμήμα $KZ = KO$. Η ΒΖ τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Θ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα ΟΓ και ΒΖ διχοτομούνται

β) $AO = \Delta Z$

γ) Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΔΖΓ είναι ίσα.

78. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Έστω Ε,Ζ και Η τα μέσα των ΒΔ, ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Να βρείτε τη σχέση των πλευρών ΑΒ και ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, ώστε το παραλληλόγραμμο ΔΕΖΗ να είναι ρόμβος.

γ) Στην περίπτωση που το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο (η γωνία Β ορθή), να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου ΔΕΖΗ.

Διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου – θεώρημα 30î

79. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = 120^\circ$ και $AB = 2A\Delta$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε και στη συνέχεια το κάθετο τμήμα ΑΖ στη ΔΕ. Να αποδείξετε ότι:

α) $A\hat{\Delta}E = 30^\circ$ **β)** $AZ = \dfrac{AB}{4}$

80. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$. Στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) παίρνουμε σημείο Δ ώστε $AB = A\Delta$ και στη προέκταση της ΔΓ (προς το Γ) παίρνουμε σημείο Ε ώστε $\Delta\Gamma = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΔΓΒ είναι ορθογώνιο **β)** $BE \parallel A\Gamma$ και $A\Gamma = \dfrac{BE}{2}$

81. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Θεωρούμε το ύψος του ΑΔ και το μέσο Ζ της πλευράς ΑΓ. Προεκτείνουμε το ύψος ΑΔ (προς το Δ) κατά ίσο τμήμα ΔΕ. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta Z = \dfrac{A\Gamma}{2}$ **β)** Το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισόπλευρο

82. Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^\circ\right)$ με $\hat{B}=2\hat{\Gamma}$. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΒ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Δ.

α) i. Να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ.

ii. τις γωνίες του τριγώνου ΑΜΓ.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΓ.

83. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma$ και $\hat{A}>90^\circ$. Έστω $B\Delta\perp A\Gamma$ και $\Gamma E\perp AB$.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta=\Gamma E$.

β) Αν Μ το μέσο της ΒΓ, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $M\Delta=ME$

ii. Να αποδείξετε ότι η ΑΜ διχοτομεί τη γωνία ΔΜΕ.

84. Οι κύκλοι (K,ρ) και $(\Lambda,3\rho)$ εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Μια ευθεία εφάπτεται εξωτερικά και στους δύο κύκλους στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου ΚΛ στο σημείο Ε. Φέρουμε από το σημείο Κ παράλληλο τμήμα στην ε που τέμνει το τμήμα ΛΓ στο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΔΚ είναι ορθογώνιο.

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{K}\Lambda=30^\circ$

γ) Να αποδείξετε ότι $E\Lambda=6\rho$.

85. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=2\hat{\Gamma}$ και η διχοτόμος ΒΔ της γωνίας Β. Από το μέσο Μ της ΑΓ φέρνουμε παράλληλη στη διχοτόμο ΒΔ που τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Ν. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές

β) Το τρίγωνο ΜΝΓ είναι ισοσκελές

γ) $AN\perp B\Gamma$

86. Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Έστω ότι Δ είναι το μέσο της ΑΜ τέτοιο, ώστε $B\Delta=\dfrac{B\Gamma}{2}$ και γωνία $A\hat{\Delta}B=120^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΜ.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ορθογώνιο.

γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΔΜΓ είναι ίσα.

δ) Αν το σημείο Κ είναι η προβολή του Δ στη ΒΓ, να αποδείξετε ότι $2MK=A\Delta$.

87. Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ$\left(\hat{A}=90^\circ\right)$, τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών του και το ύψος του ΑΚ. Έστω Θ το σημείο τομής των ΑΖ, ΔΕ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ορθογώνιο. **ii.** $A\Theta=\Theta E=\dfrac{B\Gamma}{4}$

β) Αν επιπλέον είναι $\hat{\Gamma}=30^\circ$,

i. να βρείτε τη γωνία AZB **ii.** να αποδείξετε ότι $BK = \frac{B\Gamma}{4}$

88. Δύο ίσοι κύκλοι (O,ρ) και (K,ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Ε. Αν ΟΑ και ΟΒ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο Ο στον κύκλο (K,ρ), να αποδείξετε ότι:

α) $AE = BE$ **β)** $A\hat{O}K = 30^\circ$ **γ)** Το τετράπλευρο ΑΚΒΕ είναι ρόμβος.

89. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή. Φέρουμε τη διάμεσο του ΑΜ και σε τυχαίο σημείο Κ αυτής φέρουμε κάθετη στην ΑΜ η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Αν Η είναι το μέσο του ΔΕ να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B} = B\hat{A}M$ **β)** $A\hat{\Delta}H = \Delta\hat{A}H$ **γ)** Η ευθεία ΑΗ τέμνει κάθετα τη ΒΓ.

90. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και Δ,Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Στην προέκταση της ΔΕ (προς το Ε) θεωρούμε σημείο Λ ώστε $E\Lambda = AE$ και στη προέκταση της ΕΔ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο Κ τέτοιο, ώστε $\Delta K = A\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

α) $K\Delta = \Lambda E$

β) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ορθογώνια.

γ) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ίσα.

91. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και στην προέκταση της ΓΒ προς το Β, θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $B\Delta = AB$ ενώ στη προέκταση της ΒΓ προς το Γ, θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $\Gamma E = A\Gamma$. Αν οι εξωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ τέμνουν τις ΑΔ και ΑΕ στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα και η ΚΛ τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Κ και Λ είναι μέσα των ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα.

β) Τα τρίγωνα ΚΜΑ και ΑΝΛ είναι ισοσκελή.

γ) $K\Lambda = \frac{AB + A\Gamma + B\Gamma}{2}$

92. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ,Ε και Μ των ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Στη προέκταση του ΜΔ (προς το Δ) θεωρούμε τμήμα $\Delta Z = \Delta M$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΒΜΔ είναι ίσα

β) Το τετράπλευρο ΖΑΓΜ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Τα τμήματα ΖΕ και ΑΔ τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται.

δ) Η ΒΖ είναι κάθετη στη ΖΑ.

93. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο ΑΜ τέτοια, ώστε $AM = AB$. Φέρουμε το ύψος του ΑΚ και το προεκτείνουμε (προς το Κ) κατά τμήμα $K\Delta = AK$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ (προς το Μ) κατά τμήμα $ME = AM$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta E \perp A\Delta$ και $\Delta E = 2KM$.

β) Το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Το τετράπλευρο ΑΒΔΜ είναι ρόμβος
δ) Η προέκταση της ΔΜ τέμνει την ΑΓ στο μέσον του Ζ.

94. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και Δ,Ε και Ν τα μέσα των ΑΒ,ΑΓ και ΔΕ αντίστοιχα. Στο τμήμα ΒΓ θεωρούμε σημεία Κ και Λ ώστε $\Delta K = KB$ και $E\Lambda = \Lambda\Gamma$.Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\hat{K}\Lambda = 2\hat{B}$ και $E\hat{\Lambda}K = 2\hat{\Gamma}$

β) Το τετράπλευρο ΔΕΛΚ είναι παραλληλόγραμμο με $\Delta E = 2\Delta K$

γ) $AN = \Delta K = \dfrac{B\Gamma}{4}$

95. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ $(AB > A\Gamma)$, ΑΔ το ύψος του και Μ το μέσο του ΑΒ. Η προέκταση της ΜΔ τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο σημείο Ε ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B} = \hat{E}$ **β)** $\hat{\Gamma} = 2\hat{B} = A\hat{M}\Delta$ **γ)** $\Gamma E < A\Gamma$

Βαρύκεντρο – ορθόκεντρο τριγώνου

96. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΚ και ΓΛ, τα οποία τέμνονται στο Ι. Αν τα σημεία Μ και Ν είναι τα μέσα των ΒΙ και ΓΙ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές
β) Τα τρίγωνα ΒΙΛ και ΓΙΚ είναι ίσα.
γ) Το ΑΙ προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς ΒΓ.
δ) Το τετράπλευρο ΜΛΚΝ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

97. Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ ονομάζουμε Ο το κέντρο του και θεωρούμε τυχαίο σημείο Ε του τμήματος ΟΔ. Φέρνουμε την κάθετη από το Β στην ΑΕ, που τέμνει το τμήμα ΑΟ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες ω και φ του σχήματος είναι ίσες
β) $BZ = AE$ και $\Gamma Z = BE$.
γ) Το τμήμα ΕΖ είναι κάθετο στο ΑΒ.

98. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και $AB > B\Gamma$, $A\Gamma = 2B\Gamma$.Στην προέκταση της πλευράς ΔΑ (προς το Α) παίρνουμε σημείο Ε ώστε $\Delta A = AE$.

α) Να αποδείξετε ότι:
i. Το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι παραλληλόγραμμο.
ii. Το τρίγωνο ΕΒΔ είναι ισόπλευρο.
β) Αν η ΕΟ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι $\Delta Z \perp EB$.

99. Δίνονται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, ΒΕ, ΓΖ τα ύψη από τις κορυφές Β,Γ αντίστοιχα και Η το ορθόκεντρο του τριγώνου. Επίσης δίνονται τα Μ, Ν, Κ, Λ μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, ΑΓ, ΓΗ, ΒΗ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:
i. $MN = \Lambda K$

ii. $\text{ΝΚ} = \text{ΜΛ} = \dfrac{\text{ΑΗ}}{2}$

iii. Το τετράπλευρο ΜΝΚΛ είναι ορθογώνιο.

β) Αν Ο είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι $\text{Μ}\hat{\text{Ο}}\text{Κ} = 90^\circ$.

100. Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε τη διαγώνιο ΒΔ (προς το Δ) κατά τμήμα $\Delta\text{Ε} = \Delta\text{Β}$. Έστω Μ το μέσο της ΑΔ και Ν το σημείο τομής των ευθειών ΑΕ και ΓΔ.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta\text{Ν} = \Delta\text{Μ}$

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΝΜΔ.

γ) Να αποδείξετε ότι:

i. $\text{ΜΝ} \perp \text{ΑΓ}$ **ii.** $\text{ΓΜ} \perp \text{ΑΝ}$

101. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\text{Α}} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ με Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς ΒΓ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. η ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Β

ii. $\text{ΑΕ} = \dfrac{\text{ΓΕ}}{2}$

iii. η ΒΕ είναι μεσοκάθετος της διαμέσου ΑΜ.

β) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ που τέμνει την ΒΕ στο Η, να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ, Η και Ν είναι συνευθειακά.

102. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ}$ και το ύψος του ΑΜ. Φέρουμε τη ΜΔ κάθετη στην ΑΓ και θεωρούμε σημείο Η το μέσο του ΜΔ. Από το Η φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ η οποία τέμνει τις ΑΜ και ΑΓ στα σημεία Κ και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $\text{ΗΖ} = \dfrac{\text{ΒΓ}}{4}$ **β)** $\text{ΜΖ} \parallel \text{ΒΔ}$ **γ)** Η ευθεία ΑΗ είναι κάθετη στη ΒΔ.

103. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\text{Α} = 90^\circ)$ με ΒΔ διχοτόμο και ΑΚ ύψος ,που τέμνονται στο Ε. Η κάθετη από το Ε στην ΑΒ τέμνει τις ΑΒ και ΒΓ στα Η και Ζ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι :

i) Τα τρίγωνα ΕΗΑ και ΕΚΖ είναι ίσα

ii) Το τρίγωνο ΒΚΗ είναι ισοσκελές

iii) Η ΒΔ είναι κάθετη στην ΑΖ

β) Αν επιπλέον το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές ,να αποδείξετε ότι η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$.

Τραπέζιο

Τραπέζιο λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες.

- Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του λέγεται διάμεσος του τραπεζίου.
  Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμα τους.

- Η διάμεσος ΕΖ τραπεζίου ΑΒΓΔ διέρχεται από τα μέσα Κ και Λ των διαγωνίων του και το τμήμα ΚΛ είναι παράλληλο με τις βάσεις του και ίσο με την ημιδιαφορά τους.

- Ισοσκελές τραπέζιο λέγεται το τραπέζιο του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες.

- Σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο ισχύουν οι εξής ιδιότητες:
  α) οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες.
  β) οι διαγώνιοι του είναι ίσες.

- Ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:
  (i) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση του είναι ίσες.
  (ii) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

104. Έστω τρίγωνο ΑΒΔ με $\widehat{A}=120^{\circ}$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΖΔ. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΔ είναι ίσα
β) Το τετράπλευρο ΒΔΖΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

105. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ $(AB\,||\,\Gamma\Delta)$ είναι $\Gamma\Delta=2AB$. Επίσης Ζ,Η,Ε είναι τα μέσα των ΑΔ,ΒΓ και ΔΓ αντίστοιχα. Ακόμη η ΖΗ τέμνει τις ΑΕ,ΒΕ στα σημεία Θ,Ι αντίστοιχα.
α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Να δείξετε ότι τα σημεία Θ,Ι είναι μέσα των ΑΕ,ΒΕ αντίστοιχα.
γ) Να δείξετε ότι $ZH=\frac{3}{2}AB$.

106. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\widehat{A}=90^{\circ}\right)$ και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε $\Delta E\perp B\Gamma$ και ονομάζουμε Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές
β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΕΖ είναι ίσα.
γ) Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετη των τμημάτων ΑΕ και ΖΓ.
δ) Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

107. Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $(AB||\Gamma\Delta)$ είναι $AB = A\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ.

β) Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου Ε, ώστε το τετράπλευρο ΑΒΕΔ να είναι ρόμβος.

γ) Αν επιπλέον είναι $B\hat{A}\Delta = 120^\circ$ και οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται στο σημείο Ο, να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΕΟΒΓ.

108. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Ο το κέντρο του. Από την κορυφή Δ φέρουμε το τμήμα ΔΚ κάθετο στην ΑΓ και στην προέκταση του προς το Κ θεωρούμε σημείο Ε, ώστε $KE = \Delta K$. Να αποδείξετε ότι:

α) $EO = \dfrac{B\Delta}{2}$

β) $\Delta\hat{E}B = 90^\circ$

γ) Το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

109. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ και τη διάμεσό του ΑΜ. Από το Γ φέρουμε κάθετη στην ευθεία ΑΜ, η οποία την τέμνει στο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισόπλευρο

β) $ME = M\Delta = \dfrac{B\Gamma}{4}$

γ) Το ΑΔΕΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

110. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ. Φέρνουμε την ΑΕ κάθετη στη διαγώνιο ΒΔ. Αν Ζ είναι το συμμετρικό του Α ως προς τη διαγώνιο ΒΔ, τότε να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές

β) $Z\Gamma = 2OE$

γ) Το τετράπλευρο με κορυφές Β, Δ, Ζ και Γ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

111. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και δύο κάθετες ακτίνες του ΟΒ και ΟΓ. Έστω Α το μέσον του τόξου ΒΓ. Από το Α φέρουμε κάθετες στις ακτίνες ΟΒ και ΟΓ που τις τέμνουν στα Δ και Ε αντίστοιχα. Οι προεκτάσεις των ΑΔ και ΑΕ τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $AZ = AH$

β) Το ΑΔΟΕ είναι ορθογώνιο.

γ) Τα σημεία Ζ και Η είναι αντιδιαμετρικά.

δ) Το τετράπλευρο ΒΓΗΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

112. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ >ΒΓ και Β<90° θεωρούμε σημείο Ζ στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) τέτοιο ώστε ΓΖ=ΒΓ. Αν Ε είναι σημείο της ΑΒ, τέτοιο ώστε ΕΓ=ΓΒ, να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία ΒΕΖ είναι ορθή

β) Το τετράπλευρο ΑΕΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ) Το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

113. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $(AB||\Gamma\Delta)$ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η ΑΓ είναι κάθετη στην ΑΔ και η ΒΔ είναι κάθετη στη ΒΓ. Θεωρούμε τα μέσα Μ,Ε και Ζ των ΓΔ,ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

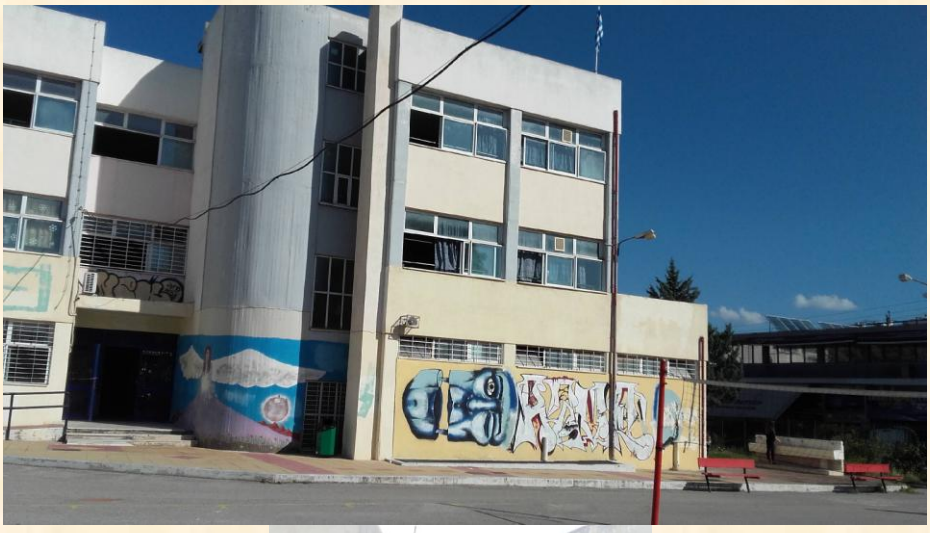
α) ΜΕ = ΜΖ

β) Η ΜΖ είναι κάθετη στην ΑΓ

γ) Τα τρίγωνα ΜΔΕ και ΜΖΓ είναι ίσα

δ) Η ΟΜ είναι μεσοκάθετος του ΕΖ.

Οι ασκήσεις της Γεωμετρίας είναι της τράπεζας θεμάτων




Μ.Γ.Ε.Λ ΠΕΡΙΣΤΕΡΙΟΥ