

Διαγώνισμα στις ρίζες 2017-18

Ον/νομο:..... Ομάδα Α

Θέμα Α

Σε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής, διαφορετικά να κυκλώσετε το γράμμα Ψ.

- | | | |
|--|---|---|
| α) $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \alpha + \beta$. | A | Ψ |
| β) Αν $\beta \geq 0$ τότε $\sqrt{\alpha^2 \beta} = \alpha \sqrt{\beta}$. | A | Ψ |
| γ) Αν $\alpha < 0, \beta < 0$ τότε $\sqrt{-\alpha} \cdot \sqrt{-\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$. | A | Ψ |
| δ) $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = 2 - \sqrt{5}$. | A | Ψ |
| ε) $\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2$ | A | Ψ |

μονάδες 5x3

Θέμα Β

Έστω $\alpha = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

B1. Να δείξετε ότι $\alpha = 2$.

μονάδες 12

B2. Να δείξετε ότι $\sqrt[4]{\alpha^5} \cdot \sqrt[3]{\alpha^9} = \alpha^2$.

μονάδες 10

B3. Να δείξετε ότι $\sqrt{8 - 2\sqrt{10}} > \sqrt{5} - \sqrt{\alpha}$.

μονάδες 11

B4. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \quad \text{και} \quad \frac{4}{\sqrt{\alpha} - 1}$$

μονάδες 12

Θέμα Γ

Να αποδείξετε ότι $(\sqrt{28} + \sqrt{7} + \sqrt{32})(\sqrt{63} - \sqrt{32}) = 31$

μονάδες 20

Θέμα Δ

Δίνεται η παράσταση: $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$

Δ1. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

μονάδες 10

Δ2. Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

μονάδες 10

Διαγώνισμα στις ρίζες 2017-18

Ον/νομο:..... Ομάδα Α

Θέμα Α

Σε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής, διαφορετικά να κυκλώσετε το γράμμα Ψ.

$$\alpha) \sqrt{(2-\sqrt{7})^2} = 2-\sqrt{7}. \quad \text{A} \quad \Psi$$

$$\beta) \sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2 \quad \text{A} \quad \Psi$$

$$\gamma) \text{ Αν } \beta \geq 0 \text{ τότε } \sqrt{\alpha^2\beta} = \alpha\sqrt{\beta}. \quad \text{A} \quad \Psi$$

$$\delta) \text{ Αν } \alpha < 0, \beta < 0 \text{ τότε } \sqrt{-\alpha} \cdot \sqrt{-\beta} = \sqrt{\alpha\beta}. \quad \text{A} \quad \Psi$$

$$\epsilon) \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \alpha + \beta. \quad \text{A} \quad \Psi$$

μονάδες 5x3

Θέμα Β

$$\text{Έστω } \alpha = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{3-\sqrt{5}}.$$

B1. Να δείξετε ότι $\alpha = 2$.

μονάδες 12

$$\text{B2.} \text{ Να δείξετε ότι } \sqrt[4]{\alpha^5} \cdot \sqrt[4]{\alpha^9} = \alpha^2.$$

μονάδες 10

$$\text{B3.} \text{ Να δείξετε ότι } \sqrt{6-2\sqrt{6}} > \sqrt{3} - \sqrt{\alpha}.$$

μονάδες 11

B4. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{3}} \quad \text{και} \quad \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{\alpha}}$$

μονάδες 12

Θέμα Γ

Να αποδείξετε ότι $(\sqrt{8} - \sqrt{18})(\sqrt{50} + \sqrt{72} - \sqrt{32}) = -14$

μονάδες 20

Θέμα Δ

Δίνεται η παράσταση: $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$

Δ1. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

μονάδες 10

Δ2. Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

μονάδες 10

Λύσεις

Ομάδα Α

Θέμα Α

α) Ψ β) Ψ γ) Α δ) Ψ ε) Ψ

Θέμα Β

$$\text{B1. } \alpha = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \sqrt{2[2^2 - (\sqrt{2})^2]} = \sqrt{2(4-2)} = \sqrt{2 \cdot 2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{B2. } \sqrt[4]{\alpha^5} \cdot \sqrt[12]{\alpha^9} = 2^{\frac{5}{4}} \cdot 2^{\frac{9}{12}} = 2^{\frac{5}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{5+3}{4}} = 2^{\frac{8}{4}} = 2^2 = \alpha^2$$

$$\text{B3. } \sqrt{8-2\sqrt{10}} > \sqrt{5}-\sqrt{\alpha} \Leftrightarrow (\sqrt{8-2\sqrt{10}})^2 > (\sqrt{5}-\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 8-2\sqrt{10} > (\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 8-2\sqrt{10} > 5-2\sqrt{10}+2 \Leftrightarrow 8 > 7 \text{ ισχύει}$$

$$\text{B4. } \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{2\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\cancel{2}\sqrt[3]{2^2}}{\cancel{2}} = \sqrt[3]{4}$$

$$\frac{4}{\sqrt{\alpha}-1} = \frac{4}{\sqrt{2}-1} = \frac{4(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{4(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2})^2-1} = \frac{4(\sqrt{2}-1)}{2-1} = 4(\sqrt{2}-1)$$

Θέμα Γ

$$\begin{aligned} (\sqrt{28} + \sqrt{7} + \sqrt{32})(\sqrt{63} - \sqrt{32}) &= (\sqrt{4} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{7} + \sqrt{16} \cdot \sqrt{2})(\sqrt{9} \cdot \sqrt{7} - \sqrt{16} \cdot \sqrt{2}) = \\ &= (2\sqrt{7} + \sqrt{7} + 4\sqrt{2})(3\sqrt{7} - 4\sqrt{2}) = (3\sqrt{7} + 4\sqrt{2})(3\sqrt{7} - 4\sqrt{2}) = \\ &= (3\sqrt{7})^2 - (4\sqrt{2})^2 = 9 \cdot 7 - 16 \cdot 2 = 63 - 32 = 31 \end{aligned}$$

Θέμα Δ

Δ1. Η παράσταση Α ορίζεται όταν $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$ και $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Με συναλήθευση προκύπτει ότι $x \geq 4$

$$\text{Δ2. } A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1}) = (\sqrt{x-4})^2 - (\sqrt{x+1})^2 = x-4 - x-1 = -5$$

Ομάδα Β

Θέμα Α

α) Ψ β) Ψ γ) Ψ δ) Α ε) Ψ

Θέμα Β

$$\text{B1. } \alpha = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{3-\sqrt{5}} = \sqrt[3]{2(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = \sqrt[3]{2[3^2 - (\sqrt{5})^2]} = \sqrt[3]{2(9-5)} = \\ = \sqrt[3]{2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\text{B2. } \sqrt[4]{\alpha^5} \cdot \sqrt[12]{\alpha^9} = 2^{\frac{5}{4}} \cdot 2^{\frac{9}{12}} = 2^{\frac{5}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{5+3}{4}} = 2^{\frac{8}{4}} = 2^2 = \alpha^2$$

$$\text{B3. } \sqrt{6-2\sqrt{6}} > \sqrt{3}-\sqrt{2} \Leftrightarrow (\sqrt{6-2\sqrt{6}})^2 > (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 6-2\sqrt{6} > (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow \\ 6-2\sqrt{6} > 3-2\sqrt{6}+2 \Leftrightarrow 6 > 5 \text{ ισχύει}$$

$$\text{B4. } \frac{3}{\sqrt[3]{3}} = \frac{3\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3^2}} = \frac{3\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{\beta\sqrt[3]{3^2}}{\beta} = \sqrt[3]{9} \\ \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

Θέμα Γ

$$(\sqrt{8}-\sqrt{18})(\sqrt{50}+\sqrt{72}-\sqrt{32}) = (\sqrt{4} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{9} \cdot \sqrt{2})(\sqrt{25} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{16} \cdot \sqrt{2}) = \\ (2\sqrt{2} - 3\sqrt{2})(5\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 4\sqrt{2}) = -\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2} = -7(\sqrt{2})^2 = -7 \cdot 2 = -14$$

Θέμα Δ

Δ1. Η παράσταση Α ορίζεται όταν $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$ και $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

Με συναλήθευση προκύπτει ότι $x \geq 4$.

$$\text{Δ2. } A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1}) = (\sqrt{x-4})^2 - (\sqrt{x+1})^2 = x-4 - x-1 = -5$$