ΤΕΣΤ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ (1)
(ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ)
Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα 1ο

Α) Δίνονται δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου.
Αν (x, y) οι συντεταγμένες του μέσου *Μ* του *ΑΒ*, να αποδείξετε ότι
$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

(15 μονάδες)

Β) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, τότε ισχύει:
$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$.

β. Το διάνυσμα $\vec{a} = (0, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}^*$ είναι παράλληλο στον άξονα y΄y.

γ. Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχει συντεταγμένες $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$.

δ. Το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\kappa, -\kappa), \kappa \in \mathbb{R}^*$ σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα χ΄χ.

ε. Αν $\vec{\alpha} = -\lambda\vec{\beta}, \lambda \in \mathbb{R}$, τότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα.

(10 μονάδες)

Θέμα 2ο

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (-3, 4)$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = (\lambda^2 - 7, \kappa^2 - \kappa - 2), \kappa, \lambda > 0$.

α) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

(10 μονάδες)

Αν το σημείο Β έχει συντεταγμένες $(-1, 2)$:

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του Α .

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

δ) να βρείτε σημείο Ε του άξονα χ΄χ ώστε τα σημεία Α,Β,Ε να είναι συνευθειακά.

(10+10+15 μονάδες)

ε) Αν το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι το μηδενικό να υπολογίσετε τους πραγματικούς κ,λ.

(15 μονάδες)

στ) Αν τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι ίσα να υπολογίσετε τους πραγματικούς κ,λ.

(15 μονάδες)

Λύσεις

Θέμα 1ο

Α) Θεωρία
Β) ΣΣΛΛΛ

Θέμα 2ο

α) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$.

β) Αν οι συντεταγμένες του Α είναι (x_A, y_A) ,τότε

$x_B - x_A = -3 \Leftrightarrow x_A = x_B + 3 = 2$ και $y_B - y_A = 4 \Leftrightarrow y_A = y_B - 4 = -2$

οπότε $A(2,-2)$.

γ) Αν οι συντεταγμένες του μέσου Μ είναι (x_M, y_M) ,τότε

$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2+2}{2} = 0$,

οπότε οι συντεταγμένες του Μ είναι $M\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

δ) Το σημείο Ε είναι σημείο του χ΄χ άρα η τεταγμένη του είναι ίση με 0,οπότε είναι της μορφής $(x,0)$ και $\overrightarrow{BE} = (x+1,-2)$.

Τα σημεία Α,Β,Ε είναι συνευθειακά οπότε

$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BE}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ x+1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 6 - 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow 4x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} .$$

Άρα $E\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

ε) Το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι το μηδενικό οπότε $\lambda^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 7 \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} \lambda = \sqrt{7}$ και

$\kappa^2 - \kappa - 2 = 0 \Leftrightarrow (\kappa = -1\ \textit{απορρίπτεται})\ \acute{\eta}\ (\kappa = 2)$.

στ) Από την ισότητα των διανυσμάτων έχουμε $\lambda^2 - 7 = -3 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} \lambda = 2$ και

$\kappa^2 - \kappa - 2 = 4 \Leftrightarrow \kappa^2 - \kappa - 6 = 0 \Leftrightarrow (\kappa = -2\ \textit{απορρίπτεται})\ \acute{\eta}\ (\kappa = 3)$.

ΤΕΣΤ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ (2)
(ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ)
Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα 1ο

Α) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$,τα οποία δεν είναι παράλληλα στον άξονα y΄y ,με συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$.

(15 μονάδες)

Β) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ είναι η ορίζουσα των μη παραλλήλων διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, τότε ισχύει: $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta}) \neq 0$.

β. Το διάνυσμα $\vec{a} = (\lambda, 0), \lambda \in \mathbb{R}^*$ είναι παράλληλο στον άξονα y΄y.

γ. Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχει συντεταγμένες $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

δ. Το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (-\kappa, \kappa), \kappa > 0$ σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα χ΄χ.

ε. Αν $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}, \lambda \in \mathbb{R}$,τότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα.

(10 μονάδες)

Θέμα 2ο

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (6, -8)$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = (\kappa^2 + \kappa, \lambda^2 - 17), \kappa, \lambda < 0$.

α) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

(10 μονάδες)

Αν το σημείο Α έχει συντεταγμένες $(2, -4)$:

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του Β .
γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.
δ) να βρείτε σημείο Ε του άξονα y΄y ώστε τα σημεία Α,Β,Ε να είναι συνευθειακά.

(10+10+15 μονάδες)

ε) Αν το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι το μηδενικό να υπολογίσετε τους πραγματικούς κ,λ.

(15 μονάδες)

στ) Αν τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι ίσα να υπολογίσετε τους πραγματικούς κ,λ.

(15 μονάδες)

Λύσεις

Θέμα 1ο

Α) Θεωρία
Β) ΣΛΣΣΛ

Θέμα 2ο

α) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$.

β) Αν οι συντεταγμένες του Β είναι (x_B, y_B) ,τότε

$x_B - x_A = 6 \Leftrightarrow x_B = x_A + 6 = 8$ και $y_B - y_A = -8 \Leftrightarrow y_B = y_A - 8 = -12$

οπότε $B(8, -12)$.

γ) Αν οι συντεταγμένες του μέσου Μ είναι (x_M, y_M) ,τότε

$x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{2+8}{2} = 5$, $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{-4-12}{2} = -8$,

οπότε οι συντεταγμένες του Μ είναι $M(5, -8)$

δ) Το σημείο Ε είναι σημείο του y΄y άρα η τετμημένη του είναι ίση με 0,οπότε είναι της μορφής $(0, y)$ και $\overrightarrow{BE} = (-8, y+12)$.

Τα σημεία Α,Β,Ε είναι συνευθειακά οπότε

$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BE}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 6 & -8 \\ -8 & y+12 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 6y + 72 - 64 = 0 \Leftrightarrow 6y = -8 \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3} .$$

Άρα $E\left(0, -\dfrac{4}{3}\right)$.

ε) Το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι το μηδενικό οπότε

$\kappa^2 + \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa(1+\kappa) = 0 \Leftrightarrow (\kappa = 0\ \alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota)\, \acute{\eta}\, (\kappa = -1)$ και

$\lambda^2 - 17 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 17 \overset{\lambda<0}{\Leftrightarrow} \lambda = -\sqrt{17}$ και

.

στ) Από την ισότητα των διανυσμάτων έχουμε

$\kappa^2 + \kappa = 6 \Leftrightarrow \kappa^2 + \kappa - 6 = 0 \Leftrightarrow (\kappa = 2\ \alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota)\ \acute{\eta}\ (\kappa = -3)$ και

$\lambda^2 - 17 = -8 \Leftrightarrow \lambda^2 = 9 \overset{\lambda<0}{\Leftrightarrow} \lambda = -3$.

.