ΘΕΜΑ Α

1. Σε μια φθίνουσα μηχανική ταλάντωση το πλάτος Α μειώνεται εκθετικά με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση: $A = A_o e^{-\Lambda t}$, όπου A_o το αρχικό πλάτος της ταλάντωσης και Λ μια θετική σταθερά. Η σειρά των μέγιστων απομακρύνσεων προς την ίδια κατεύθυνση A_o, A_1, A_2 που φαίνονται στο διάγραμμα μπορεί να είναι:

α) $A_o = 40cm$, $A_1 = 10cm$, $A_2 = 2,5cm$

β) $A_o = 40cm$, $A_1 = 30cm$, $A_2 = 20cm$

γ) $A_o = 40cm$, $A_1 = 20cm$, $A_2 = 5cm$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Απάντηση: Παρατηρούμε ότι για το α) $\frac{A_o}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = 4 = σταθερό.$

2. Ένα σώμα μάζας m = 1Kg είναι προσδεμένο σε ελατήριο σταθεράς K = 400N/m και εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση, μικρής σταθεράς απόσβεσης. Η συχνότητα του διεγέρτη είναι $f = \frac{5}{\pi}$ Hz. Για να φέρουμε το σύστημα ελατηρίου - σώματος σε κατάσταση συντονισμού πρέπει να αυξήσουμε τη συχνότητα του διεγέρτη κατά:

α) 25% **β)** 50% **γ)** 100%

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Απάντηση: Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος είναι: $f_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{400}{1}}Hz = \frac{10}{\pi}Hz$

Θα πρέπει $f' = 2f_o = 2f$ *άρα* $\pi\% = \frac{f'-f}{f}100\% = 100\%$. *Σωστό το γ)*

ΘΕΜΑ Β

Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις (1) και (2) που έχουν χρονικές εξισώσεις απομάκρυνσης $x_1 = 2ημ198\pi t$ (S.I.) και $x_2 = 2ημ202\pi t$ (S.I.) αντίστοιχα και οι οποίες εξελίσσονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας.

α) Να γράψετε τη χρονική εξίσωση απομάκρυνσης της συνισταμένης ταλάντωσης.

β) Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή κατά την οποία το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης γίνεται μέγιστο για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή t = 0.

γ) Να βρείτε τον αριθμό των ταλαντώσεων στη χρονική διάρκεια μιας περιόδου των διακροτημάτων.

Απάντηση: A = 2m, $\omega_1 = 198\pi$ *rad/s,* $\omega_2 = 202\pi$ *rad/s*

$$\omega_1 = 2\pi f_1 \Rightarrow f_1 = \frac{198\pi}{2\pi} = 99Hz, \qquad f_2 = \frac{202\pi}{2\pi} = 101Hz$$

a) $x = 2Aσυν\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t \cdot ημ\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t \Rightarrow x = 4συν(2\pi t) \cdot ημ(200\pi t) \quad (S.I.)$

b) $|A'| = |4\sigma\upsilon\nu(2\pi t)| = 4 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(2\pi t) = \pm 1 \Rightarrow 2\pi t = k\pi \; \mu\varepsilon \; k \in Z_+$.
Για k=1 $t = \frac{1}{2}s = 0{,}5s$.

c) $f_\delta = |f_1 - f_2| = 2Hz$, $T_\delta = \frac{1}{f_\delta} = 0{,}5s \;\; \kappa\alpha\iota \; f_\tau = \frac{f_1+f_2}{2} = 100Hz$, $T_\tau = \frac{1}{f_\tau} = 0{,}01s$

$$N = \frac{T_\delta}{T_\tau} = 50 \; \tau\alpha\lambda\alpha\nu\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\iota\varsigma$$

ΘΕΜΑ Γ

Ένα σώμα μάζας m = 2kg ισορροπεί δεμένο στο ένα άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k = 800 N/m το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε οροφή. Ασκούμε στο σώμα κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω σταθερή δύναμη F, οπότε ξεκινά να κινείται. Κάποια στιγμή που θεωρείται t = 0 που το σώμα έχει αποκτήσει ταχύτητα μέτρου $2\sqrt{3}m/s$ κινούμενο προς τα κάτω καταργούμε ακαριαία τη δύναμη F, οπότε από εκεί και μετά το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση ενέργειας 16J.
α) Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης F.
β) Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της κινητικής ενέργειας του σώματος, θεωρώντας ως θετική φορά τη φορά της δύναμης F.
γ) Να βρείτε το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα από το ελατήριο τις χρονικές στιγμές που το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος ισούται με 80N.
Δίνεται: $g = 10m/s^2$.

Απάντηση:

α) $E_\tau = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E_\tau}{k}} = \sqrt{\frac{2\cdot 16}{800}} = 0{,}2m$

Α.Δ.Ε.Τ. $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{kA^2 - mv^2}{k}} = \sqrt{\frac{32-24}{800}} = 0{,}1m$

Θ.Ι. $\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = w \Rightarrow ky_1 = mg \Rightarrow y_1 = \frac{20}{800}m = 0{,}025m$

Θ.Μ.Κ.Ε. $\Delta K = W_{o\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - 0 = F\cdot y - \frac{1}{2}ky^2 \Rightarrow F = \frac{\frac{1}{2}(mv^2+ky^2)}{y} = \frac{\frac{1}{2}(24+8)}{0{,}1} \Rightarrow$
$F = 160N$

β) $y = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o) \overset{t=0}{\Rightarrow} 0{,}1 = 0{,}2\eta\mu\varphi_o \Rightarrow \eta\mu\varphi_o = \frac{1}{2} \Rightarrow \underbrace{\varphi_0 = \frac{\pi}{6}rad}_{\delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta}\;\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\;\upsilon>0}$ ή $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}rad$

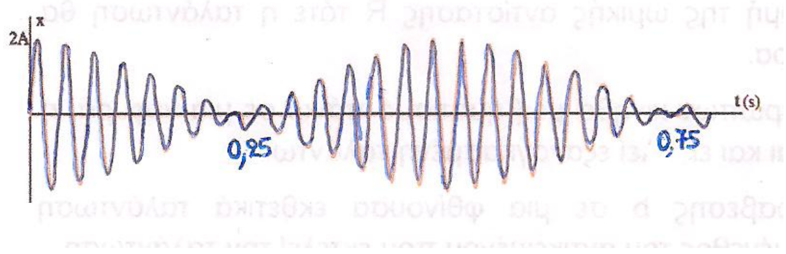
$$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_o) = E_\tau\sigma\upsilon\nu^2\left(20t + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow K = 16\sigma\upsilon\nu^2\left(20t + \frac{\pi}{6}\right) \; (S.I.)$$

$$\gamma) \; \left|\frac{dp}{dt}\right| = \Sigma F = ky \Rightarrow |y| = \frac{\left|\frac{dp}{dt}\right|}{k} \Rightarrow y = \pm\frac{80}{800} = \pm 0{,}1m$$

Για $y = -0{,}1m$, $\Delta l_1 = y - |y_1| = 0{,}075m$, $F_{\varepsilon\lambda 1} = k\Delta l_1 = 800\cdot 0{,}075 = 60N$
Για $y = +0{,}1m$, $\Delta l_2 = y + y_1 = 0{,}125m$, $F_{\varepsilon\lambda 2} = k\Delta l_2 = 800\cdot 0{,}125 = 100N$

ΘΕΜΑ Α

1. Από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, που οι συχνότητές τους f_1 και f_2 ($f_2 > f_1$) διαφέρουν πολύ λίγο, προκύπτει η περιοδική κίνηση του σχήματος.



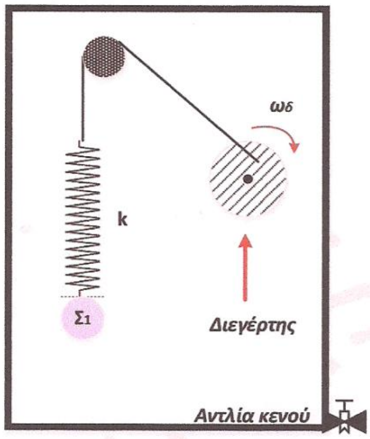
Αν η συχνότητα f_1 ισούται με 19Hz, η συχνότητα της περιοδικής κίνησης ισούται με:
α) 21Hz **β)** 20Hz **γ)** 2Hz
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Απάντηση: $t_1 = 0{,}25s, \quad t_2 = 0{,}75s, \quad T_\delta = t_2 - t_1 = 0{,}5s, \quad f_\delta = 2Hz$

$$f_\delta = |f_1 - f_2| \overset{f_2 > f_1}{\Rightarrow} 2 = f_2 - f_1 \Rightarrow f_2 = 19 + 2 \Rightarrow f_2 = 21Hz$$

$$f_\tau = \frac{f_1 + f_2}{2} = 20Hz. \quad \text{Σωστό το } \beta)$$

2. Στην διάταξη του σχήματος το $Σ_1$ έχει μάζα m_1 και εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με συχνότητα f_1 απορροφώντας ενέργεια με βέλτιστο τρόπο. Αντικαθιστούνε το σώμα $Σ_1$ με ένα άλλο σώμα $Σ_2$ μάζας m_2 και επαναλαμβάνουμε το πείραμα. Το σώμα $Σ_2$ εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση μεγίστου πλάτους με συχνότητα $f_2 = \frac{3f_1}{4}$. Ο λόγος των μαζών των σωμάτων $Σ_1$ και $Σ_2$ είναι:



α) $\frac{m_1}{m_2} = \frac{4}{3}$ **β)** $\frac{m_1}{m_2} = \frac{16}{9}$ **γ)** $\frac{m_1}{m_2} = \frac{9}{16}$
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

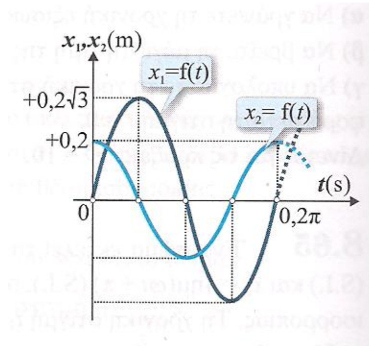
Απάντηση: $f_2 = \frac{3}{4} f_1 \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_2}} = \frac{3}{4}\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1}} \Rightarrow \frac{k}{m_2} = \frac{9}{16}\frac{k}{m_1} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{9}{16}. \quad \text{Σωστό το } \gamma)$

ΘΕΜΑ Β

Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις και $x_2 = f(t)$ που έχουν την ίδια συχνότητα, ίδια διεύθυνση και εξελίσσονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Στο διπλανό διάγραμμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις $x_1 = f(t)$ και $x_2 = f(t)$.

α) Να γράψετε τη χρονική εξίσωση απομάκρυνσης της ταλάντωση 1, της ταλάντωση 2 και της συνισταμένης ταλάντωσης.

β) Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος όταν η κινητική ενέργεια της συνισταμένης ταλάντωσης είναι ίση με την δυναμική ενέργεια.
γ) Να βρείτε την επιτάχυνση του σώματος τη χρονική στιγμή t_1, αν τη στιγμή αυτή εξαιτίας μόνο της συνιστώσας ταλάντωσης $x_1 = f(t)$ έχει ταχύτητα $-2\sqrt{3}m/s$.



Απάντηση: $A_1 = 0{,}2\sqrt{3}m,\ \ A_2 = 0{,}2m,\ \ T = 0{,}2\pi\ s,\ \ \omega = \frac{2\pi}{T} = 10\frac{rad}{s}$

α)$x_1 = A_1\eta\mu(\omega t + \varphi_o) \Rightarrow x_1 = 0{,}2\sqrt{3}\eta\mu(10t)\quad (S.I.)\ \ x_2 = A_2\eta\mu(\omega t + \varphi_o) \Rightarrow x_2 = 0{,}2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)\quad (S.I.)$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 0{,}4m,\quad \varepsilon\varphi\theta = \frac{A_2}{A_1} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}rad\quad x = A\eta\mu(\omega t + \theta) \Rightarrow x = 0{,}4\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{6}\right)\quad (S.I.)$$

β) $K = U,\ \ E_\tau = 2K \Rightarrow \frac{1}{2}mv_{max}^2 = 2\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \frac{\omega A}{\sqrt{2}} = \frac{10\cdot 0{,}4}{\sqrt{2}} \Rightarrow v = 2\sqrt{2}\frac{m}{s}$

γ)$v_1 = \omega A_1\sigma\upsilon\nu(\omega t) \Rightarrow v_1 = 2\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu(10t) \Rightarrow -2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu(10t) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(10t) = -1 \Rightarrow 10t = (2k+1)\pi,\quad k \in Z_+$

$$a = -\omega^2 x = -\omega^2\cdot 0{,}4\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{6}\right) = -40\eta\mu\left[(2k+1)\pi + \frac{\pi}{6}\right] = -40\cdot\left(-\eta\mu\frac{\pi}{6}\right) = +20\frac{m}{s^2}$$

ΘΕΜΑ Γ

Σώμα μάζας m = 1kg είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k = 100 N/m, το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε κατακόρυφο τοίχο. Το ελατήριο αρχικά έχει το φυσικό του μήκος και το σώμα ισορροπεί ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο σώμα είναι δεμένο αβαρές νήμα, το οποίο διατηρείται οριζόντιο και έχει όριο θραύσης 23N. Ασκούμε στο άκρο του νήματος οριζόντια δύναμη F με μέτρο που μεταβάλλεται με την απομάκρυνση x του σώματος από τη θέση ισορροπίας του σύμφωνα με τη σχέση F = 17 + 20x(S.I.), οπότε το σώμα ξεκινά να κινείται προς τα δεξιά (θετική φορά). Κάποια στιγμή το νήμα κόβεται. Θεωρώντας ως t = 0 τη στιγμή που κόβεται το νήμα:
α) να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος τη στιγμή t = 0.
β) να βρείτε το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα μετά τη θραύση του νήματος.
γ) να γράψετε τη χρονική εξίσωση του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος μετά τη στιγμή t = 0.

Απάντηση: α) Όταν κόβεται το νήμα: 23=17+20x$\Rightarrow x = 0{,}3m,\ \Delta K = W \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - 0 = W_F - \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2W_F - kx^2}{m}} = \sqrt{\frac{12-9}{1}} = \sqrt{3}\frac{m}{s}$

β) Α.Δ.Ε.Τ. $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{mv^2 - kx^2}{k}} = \sqrt{\frac{3+9}{100}} = 0{,}2\sqrt{3}m$

γ) $\frac{dK}{dt} = \Sigma F\cdot v = -kxv\ (1),\ \ x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o) \overset{t=0}{\Rightarrow} 0{,}3 = 0{,}2\sqrt{3}\eta\mu\varphi_o \Rightarrow \eta\mu\varphi_o = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\underbrace{\varphi_o = \frac{\pi}{3}rad}_{\delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta}\ \alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ v>0}\quad \acute{\eta}\ \varphi_o = \frac{2\pi}{3}rad,\ \ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10\frac{rad}{s},\ \ x = 0{,}2\sqrt{3}\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{3}\right)\ (S.I.)\ \ \kappa\alpha\iota\ v = 2\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{\pi}{3}\right)\ (S.I.)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -100\cdot 0{,}2\sqrt{3}\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{3}\right)\cdot 2\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -60\eta\mu\left(20t + \frac{2\pi}{3}\right)\quad (S.I.)$$